Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi Dr. A. Toth, Dr. G. Rohringer

# 2. Übung zur Quantenmechanik I, Lösungen

*Wintersemester 2011/2012*

**TUTORIUM: Freitag, 21.10.2011**.

## 3. Unschärfeprinzip für den harmonischen Oszillator *3 Punkte*

Unschärfe eines Operators: $\Delta A^2 = \left\langle a^2 \right\rangle - \langle a \rangle^2$
harmonischer Oszillator: $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$
Unschärferelation: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$$E = \langle H \rangle = \frac{\left\langle p^2 \right\rangle}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left\langle x^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \Delta x^2$$

Wir suchen das Minimum von $E$:

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta x} = 0 \Rightarrow \Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Rücksubstitution liefert $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$.

## 4. Wellenfunktion in einem 1D $\delta$-Potential *1+2+2+2 Punkte*

**a)** Ansatz für die Wellenfunktion, Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} u_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad \text{für } x < 0 \\ u_{II}(x) &= Ce^{ikx} + De^{-ikx} \qquad \text{für } x > 0 \\ k &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_I(0) &= u_{II}(0) \\ u'_{II}(0) - u'_I(0) &= \frac{2m\alpha}{\hbar^2} u(0) \end{aligned}$$

**b)** Wellenfunktionen, Eigenwerte

- $E < 0$
  - $k = i\kappa = i\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

$$\begin{aligned} u_I(x) &= Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} \qquad \text{für } x < 0 \\ u_{II}(x) &= Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \qquad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

- gebundener Zustand $\Rightarrow$ Wellenfunktion quadratintegrabel $\Rightarrow B = C = 0$

$$\begin{aligned} u_I(x) &= Ae^{\kappa x} \quad \text{für } x < 0 \\ u_{II}(x) &= De^{-\kappa x} \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

- 1. Anschlussbedingung

$$\begin{aligned} u_I(x) &= Ae^{\kappa x} \quad \text{für } x < 0 \\ u_{II}(x) &= Ae^{-\kappa x} \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

- Normierung der Wellenfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |u(x)|^2 = 1$

$$\begin{aligned} u_I(x) &= \sqrt{\kappa} e^{\kappa x} \quad \text{für } x < 0 \\ u_{II}(x) &= \sqrt{\kappa} e^{-\kappa x} \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

- 2. Anschlussbedingung

$$\kappa = \frac{-m\alpha}{\hbar^2} \Rightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

  Dies bedeutet, dass nur 1 gebundener Zustand existiert.

- $E > 0$
  - Von links einlaufendes Teilchen, Amplitude beliebig $A = 1, D = 0$

$$\begin{aligned} u_I(x) &= e^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{für } x < 0 \\ u_{II}(x) &= Ce^{ikx} \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

  - 1. Anschlussbedingung

$$1 + B = C$$

  - 2. Anschlussbedingung + 1. Anschlussbedingung

$$C = \frac{ik}{ik - \frac{m\alpha}{\hbar^2}}$$

$$B = \frac{\frac{m\alpha}{\hbar^2}}{ik - \frac{m\alpha}{\hbar^2}}$$

  Hier gibt es keine weiteren Restriktionen (Streulösung nicht normal quadratintegrabel), d.h. das Energiespektrum bleibt kontinuierlich mit $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$.
  *Bemerkung*: Das Absolutquadrat der Koeffizienten B bzw. C liefert das Reflexions- und Transmissionsvermögen (Reflexions- bzw. Transmissionswahrscheinlichkeit) der Potentialbarriere in Abhängigkeit von k (also auch E) (siehe Abb. 1).

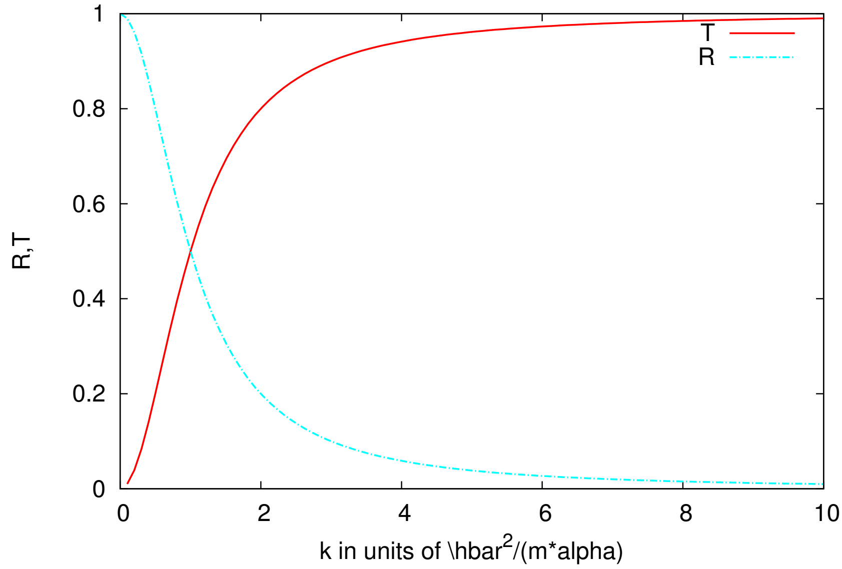


Abbildung 1: Reflexions- und Transmissionsvermögen für das 1D $\delta$-Potential in Abhängigkeit von k.

**c)** Vergleich mit Potentialtopf

Die geraden gebundenen Lösungen des endlichen Potentialtopfs des Plenums hatten die folgende Form:

$$\begin{aligned} u_I^g(x) &= A\cos(kx) \quad &\text{für } |x| \leq \frac{L}{2} \\ u_{II}^g(x) &= A\cos(k\frac{L}{2})e^{\kappa(\frac{L}{2}-|x|)} \quad &\text{für } |x| > \frac{L}{2} \\ k &= \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}, \quad &\kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

Führt man nun den Potentialtopf an die Deltafunktion heran, das heißt $V_0 \to \infty$ und $L \to 0$, wird der Bereich der frei schwingenden Lösung immer kleiner, bis er zum einem einzigen Punkt degeneriert. Die endgültige Lösung befindet sich ausschließlich im klassisch verbotenen Bereich und muss somit eine (zu $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$) exponentiell abfallende Lösung sein.

**d)** Repulsives Potential

Für $\alpha > 0$ sind nur Streulösungen möglich. Diese sind rein physikalisch gesehen die selben wie für $\alpha < 0$, was man an der $k^2$-Abhängigkeit der Reflexion- und Transmissionskoeffizienten erahnen kann.