5. Zeitentwicklung eines Zweizustandssystems

a) Gesucht sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $E_{a,b} = \hbar(\omega_1 \pm \omega_2)$.
Für die Eigenvektoren gilt $H\psi_{a,b} = E_{a,b}\psi_{a,b}$, daher erhält man

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

b) Gesucht ist die Zeitentwicklung wenn sich das System zum Zeitpunkt t=0 im Zustand ψ_1 befindet.

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a + \psi_b)$$

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_n c_n(0) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\psi_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\psi_a + e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\psi_b)\end{aligned}$$

c) Zu welchem Zeitpunkt wird die Wahrscheinlichkeit das System im Zustand ψ_2 zu finden maximal?

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \pm \psi_2)$$

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{1}{2}[e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}(\psi_1 + \psi_2) + e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}(\psi_1 - \psi_2)] \\ &= e^{-i\omega_1 t}[\cos(\omega_2 t)\psi_1 - i\sin(\omega_2 t)\psi_2]\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit das System im Zustand ψ_2 aufzufinden wird maximal, wenn der Sinus maximal wird.

$$t = \frac{(2n+1)\pi}{2\omega_2}$$

6. Teilchen in einer eindimensionalen Falle

a) Gesucht sind die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des Systems.

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2]\psi = 0$$

Das Teilchen kann sich nur im Intervall -L/2 bis +L/2 befinden. Da das Potential symmetrisch ist (V(x)=V(-x)) sind die Eigenfunktionen gerade oder ungerade. Ansatz:

$$\psi_g(x) = A\cos(kx)$$
$$\psi_u(x) = A\sin(kx)$$

Randbedingungen einsetzen. Daher Folgen die Eigenwerte:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$
$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Durch die Normierung bekommt man Faktor $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$. Damit lauten die Eigenfunktionen:

$$\psi_n^g(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{n\pi}{L}x) \text{ für } n = 1, 3, 5, ...$$
$$\psi_n^u(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi}{L}x) \text{ für } n = 2, 4, 6, ...$$

b)Beweis, dass der Erwartungswert der Energie immer als Summe von Eigenwerten mit bestimmten Gewichten geschrieben werden kann.

$$\begin{aligned}
(\psi, H\psi) &= \int d^3x\ \psi^* H\psi \\
&= \sum_{n,m}\int d^3x\ c_n^*\psi_n^* H c_m\psi_m \\
&= \sum_{n,m} c_n^* c_m E_m \int d^3x\ \psi_n^*\psi_m \\
&= \sum_{n,m} c_n^* c_m E_m \delta_{nm} \\
&= \sum_n E_n |c_n|^2
\end{aligned}$$

c) Gesucht ist der Erwartungswert der Energie zum Zeitpunkt t=0.

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_3)$$
$$(\psi, H\psi) = \sum_n E_n |(\psi_n, \psi)|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{5\pi^2}{L^2}$$

d)Zeigen Sie, dass die mit den geraden Eigenfunktionen korrespondierende Koeffizienten ab einem gewissen n verschwinden.
Weil der Kosinus eine gerade Funktion ist, kann man das Integral auch über den ganzen Bereich schreiben und halbieren.

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_{links}) &= \int_{-L/2}^{0} dx \cos(\frac{n\pi x}{L})[\cos(\frac{\pi x}{L}) - \cos(\frac{3\pi x}{L})] \\
&= \frac{1}{2}(\delta_{n1} - \delta_{n3})
\end{aligned}$$

Weiters sollen die ersten drei Terme der Zeitentwicklung dieses Zustands für Zeiten $t > 0$ angegeben werden.

$$\psi(t) = \sum_n c_n(0) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\psi_n = c_1(0)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\psi_1 + c_2(0)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\psi_2 + c_3(0)e^{-i\frac{E_3}{\hbar}t}\psi_3$$

$$c_2(0) = (\psi_2, \psi_1 - \psi_3) = \int_{-L/2}^{0} dx \frac{2}{L}\sin(\frac{2\pi x}{L})[\cos(\frac{\pi x}{L}) - \cos(\frac{3\pi x}{L})]$$

$$y = \frac{\pi}{L}x \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{L}$$

$$\begin{aligned}
c_2(0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi/2}^{0} dy (e^{(2+1)iy} - e^{-(2+1)iy}) + (e^{(2-1)iy} - e^{-(2-1)iy}) \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi/2}^{0} dy (e^{(2+3)iy} - e^{-(2+3)iy}) + (e^{(2-3)iy} - e^{-(2-3)iy}) \\
&= -\frac{32}{15\pi}
\end{aligned}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{\pi x}{L}) - \frac{32}{15\pi}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\pi x}{L}) - \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_3}{\hbar}t}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{3\pi x}{L})$$