Technische Universität Wien
Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi Dr. A. Toth, Dipl.-Ing. G. Rohringer

1. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

TUTORIUM: Freitag, 28.10.2011.

5. Zeitentwicklung eines Zweizustandssystems *0.5+1+0.5=2 Punkte*

Gegeben sei folgender Hamiltonoperator eines Zweizustandssystems in der Basis $\{\psi_1, \psi_2\}$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems $H\psi = E\psi$.

b) Das System befindet sich zum Zeitpunkt $t=0$ im Zustand ψ_1. Wie entwickelt sich das System mit der Zeit?

c) Zu welchem Zeitpunkt wird die Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand ψ_2 aufzufinden, maximal?

6. Teilchen in einer eindimensionalen Falle *2+1+1+4=8 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einer eindimensionalen Falle aus harten Wänden:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad \text{mit } V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > \frac{L}{2} \\ 0, & |x| \leq \frac{L}{2} \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systems!

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit der Eigenbasis, dass der Erwartungswert der Energie immer als Summe von Eigenwerten mit bestimmten Gewichten geschrieben werden kann:

$$(\psi, H\psi) = \sum_n E_n |(\psi_n, \psi)|^2$$

Anmerkung: ψ muss nicht unbedingt Eigenfunktion von H sein.
Freiwillig: Diskutieren Sie eine mögliche Interpretation der hergeleiteten Formel!

c) Betrachten Sie folgenden Anfangszustand des Systems:

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{1}{L}}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right]$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie zum Zeitpunkt $t=0$!

d) Betrachten Sie nun stattdessen den folgenden Anfangszustand des Systems:

$$\psi_{\text{links}}(x, t=0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right] & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} .$$

Man kann die am Punkt **6.a)** berechneten Eigenwerte des Systems bezüglich der Energie E_n aufsteigend sortieren.
Zeigen Sie, dass die mit den geraden Eigenfunktionen korrespondierenden Koeffizienten $(\psi_n, \psi_{\text{links}})$ ab einem gewissenen n verschwinden.
Geben Sie die ersten drei Terme (für steigende n) der Zeitentwicklung dieses Zustands für Zeiten $t > 0$ an.
Hinweis zur Vorgangsweise zur Berechnung der ungeraden Koeffizienten: Drücken Sie die Winkelfunktionen über die komplexe Exponentialdarstellung aus und substituieren Sie geeignet um die folgende Formel verwenden zu können:

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dy \left[\left(\mathrm{e}^{(2n+k)iy} - \mathrm{e}^{-(2n+k)iy}\right) + \left(\mathrm{e}^{(2n-k)iy} - \mathrm{e}^{-(2n-k)iy}\right)\right] \\ &= \frac{4}{(2n+k)i}\sin^2\left((2n+k)\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{(2n-k)i}\sin^2\left((2n-k)\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$