TUTORIUM: Freitag, 11.11.2011.

9. Hermitesche Operatoren, Ableitung von Operatoren *1+2+2=5 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren A und B, welche auf die Elemente von H angewandt werden können, folgende Identität gilt:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

$$(AB\psi, \phi) = (B\psi, A^\dagger \phi) = (\psi, B^\dagger A^\dagger \phi)$$

b) Welcher der folgenden Operatorenkombinationen sind hermitesch, falls A und B hermitesch sind?

- AB

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \neq AB$$

- ABA

$$(ABA)^\dagger = A^\dagger B^\dagger A^\dagger = ABA$$

- $iABA$

$$(iABA)^\dagger = -iA^\dagger B^\dagger A^\dagger \neq iABA$$

- A^N

$$N = 1,\ A = A^\dagger$$

$$N+1,\ \left(A^{(N+1)}\right)^\dagger = A^\dagger \left(A^N\right)^\dagger = A^{(N+1)}$$

- $[A, B]$

$$[A,B]^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - B^\dagger A^\dagger \neq [A,B]$$

- $\{A, B\}$

$$\{A,B\}^\dagger = B^\dagger A^\dagger + A^\dagger B^\dagger = \{A,B\}$$

Die Ableitung eines Operators $M(\theta)$ nach der Variable θ ist als Grenzwertprozess wie folgt definiert:

$$\frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{M(\theta+\epsilon) - M(\theta)}{\epsilon}$$

c) Berechne mithilfe dieses Grenzprozesses die Operatorenableitung von

$$M(\theta) = (A + \theta B)^2,$$

wobei A und B ebenfalls Operatoren sind, die jedoch nicht von θ abhängen!

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(A + (\theta+\epsilon)B)^2 - (A+\theta B)^2}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A^2 + (\theta+\epsilon)AB + (\theta+\epsilon)BA + (\theta+\epsilon)^2 B^2 - A^2 - \theta AB - \theta BA - \theta^2 B^2}{\epsilon} \\
&= AB + BA + 2\theta B^2 \\
&= \{A,B\} + 2\theta B^2
\end{aligned}$$

Wodurch unterscheidet sich die Ableitung eines Operators von jener einer Funktion?
In der Ableitung des Operators tritt ein Antikommutator auf.

10. Keine Energieentartung in einer Dimension

3+2=5 Punkte

a) Zeigen Sie, dass gebundene Zustände in einer Dimension (bis auf eine Normierung und globale Phase) nicht entartet sidn, dass es also zu jeder Eigeneenergie nur eine Wellenfunktion gibt.
Wir beginnen mit dem Ansatz, dass 2 verschiedene Wellenfunktionen die gleiche Energie haben

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + V\phi &= E\phi. \end{aligned}$$

Wir dividieren nun mit ψ und ϕ und bringen den potential Term und den konstanten Faktor auf die andere Seite:

$$\frac{\psi''}{\psi} = \frac{\phi''}{\phi}$$

Das ganze können wir in ein totales differentail umschreiben:

$$\frac{d}{dx}(\psi'\phi - \phi'\psi = 0)$$

Integration liefert

$$\psi'\phi - \phi'\psi = c$$

die Konstante ist Null da die Wellenfunktionen im unendlichen Null sind.

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{\phi'}{\phi} \Rightarrow \; ln(\psi) = \ln(\phi) + a \Rightarrow \; \psi = a\phi$$

Daraus folgt, dass die normierten Wellenfunktionen gleich sind.
b) Gegenbeispiel harmonischer Oszillator in 2 Dimensionen:

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$

Elias hat mir diese Erweiterung zur Lösung des 10. Bsp. geschickt die ich euch nicht vorenthalten möchte:

ad a) Gegenbeispiel 2: Wasserstoffatom.
In beiden Fällen lässt sich das System in zwei unabhängige Teile aufspalten. Beim 2d harmonischen Oszillator hat man sofort

$$[H_x, H_y] = 0,$$

beim Wasserstoffatom geht man in den Ortsraum und macht einen Produktansatz

$$\psi(r, \phi, \theta) =: R(r)Y(\phi, \theta),$$

wodurch sich Radial- und Winkelanteil entkoppeln lassen.
Die Entartung kommt im Fall (1) durch die Zusammenfügung von zwei gleichen, eindimensionalen und also nicht-entarteten Systemen; bzw. bei (2) durch die Kombination eines eindimensionalen und also nicht-entarteten Systems mit einem zweidimensionalen entarteten System zustande.

ad b) Die Rechnung im Eindimensionalen kann man in 2+ Dimensionen völlig analog ausführen, bis an den Punkt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\phi\psi' - \psi\phi'\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \nabla \cdot (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \partial_i\left(\phi\partial_i\psi - \psi\partial_i\phi\right) = 0.$$

Nun kann man in 1d elementar integrieren, nicht aber in 2+d. Etwas mehr Einblick gewinnt man, wenn man versucht, den Gaußschen Satz anzuwenden ("partielle Integration in höheren Dimensionen"),

$$\int \mathrm{d}V \nabla \cdot \vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{F}.$$

In 1d degeneriert das Flächenintegral zu zwei Punkten, in 2+d aber nicht, und so kann man nicht darauf schließen, dass der Integrand $\vec{F} = \phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi$ verschwindet (z.B. kann er divergenzfrei sein, $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$).