
5. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

TUTORIUM: Freitag, 11.11.2011.

9. Hermitesche Operatoren, Ableitung von Operatoren

1+2+2=5 Punkte

Gegeben sei ein Hilbertraum \mathcal{H} , der von quadratintegrablen Funktionen und folgendem inneren Produkt ($\phi, \psi \in \mathcal{H}$)

$$(\phi, \psi) = \int dx \phi^*(x)\psi(x)$$

gebildet wird.

a) Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren A und B , welche auf die Elemente von \mathcal{H} angewandt werden können, folgende Identität gilt:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

b) Welche der folgenden Operatorenkombinationen sind hermitesch, falls A und B hermitesch sind?

- AB
- ABA
- $iABA$
- A^n mit $n \in \mathbb{N}$
- $[A, B] = AB - BA$ (Kommutator)
- $\{A, B\} = AB + BA$ (Antikommutator)

Die Ableitung eines Operators $M(\theta)$ nach der Variablen θ ist als Grenzwertprozess wie folgt definiert:

$$\frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M(\theta + \epsilon) - M(\theta)}{\epsilon}.$$

c) Berechnen Sie mithilfe dieses Grenzprozesses die Operatorenableitung von

$$M(\theta) = (A + \theta B)^2,$$

wobei A und B ebenfalls Operatoren sind, die jedoch nicht von θ abhängen! Wodurch unterscheidet sich die Ableitung eines Operators von jener einer Funktion?

10. Keine Energieentartung in einer Dimension

3+2=5 Punkte

- a) Zeigen Sie, dass gebundene Zustände in einer Dimension (bis auf eine Normierung und globale Phase) nicht entartet sind, dass es also zu jeder Eigenenergie nur eine Wellenfunktion gibt.

Anleitung: Gehen Sie von zwei Eigenfunktionen zu derselben Energie aus und zeigen Sie, dass sie physikalisch ununterscheidbar sein müssen. Die entscheidende Idee des Beweises ist, die stationäre Schrödingergleichung im Ortsraum für die beiden Funktionen mit der jeweils anderen Funktion zu multiplizieren. Nach einfacher Umformung gewinnen Sie einen Ausdruck der Form $\frac{d}{dx}\mathcal{F} = 0$. Wenn Sie nun noch die Randbedingung, dass es sich um gebundene Zustände handeln soll, bei der Integration einfließen lassen, sind Sie beinahe am Ziel.

- b) Gilt die Aussage auch für gebundene Zustände in höheren Dimensionen? Falls ja, verallgemeinern Sie den Beweis für drei Dimensionen; falls nein, zeigen Sie, an welcher Stelle der Versuch fehlschlägt.