Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi Dr. A. Toth, Dipl.-Ing. G. Rohringer

6. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 18.11.2011.

11. Operatoren in Bra-Ket-Schreibweise *1+1+1+1=4 Punkte*

Es sei ein Vektorraum mit den beiden orthonormierten Basiszuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ gegeben, sowie der Zustand $|\psi\rangle = 5\,|1\rangle + i\,|2\rangle$.

a) Normieren Sie den Zustand $|\psi\rangle$ und finden Sie einen normierten Zustand, der orthogonal zu $|\psi\rangle$ ist.

b) Es sei der Operator

$$H = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| - i\,|1\rangle\langle 2| + i\,|2\rangle\langle 1|$$

gegeben. Geben Sie die Matrixdarstellung dieses Operators in der Basis $|1\rangle$, $|2\rangle$ an. Ist dieser Operator hermitesch?

c) Berechnen Sie $\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$. Dies ist der Erwartungswert des Operators H im Zustand $|\psi\rangle$.

d) Geben Sie die unitäre Transformation U (d.h. $U\,U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$) in Dirac Notation von der Basis $|1\rangle$, $|2\rangle$ in die Eigenbasis von H an.

12. Schrödinger-Gleichung in Impuls-Darstellung *3+1+2=6 Punkte*

a) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung in Impuls-Darstellung für das Potential $V(x) = -\varepsilon\,x$ mit $\varepsilon > 0$.

b) Normieren Sie die Lösungen $\psi_E(p)$ der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung zur Energie E, gemäß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_E^*(p)\psi_{E'}(p)\,dp = \delta(E-E')\,.$$

c) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktion im Orstraum folgende Form hat

$$\psi_E(x) \quad = \quad \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,\epsilon}\,\mathrm{Ai}\left[-\alpha\left(x + \frac{E}{\epsilon}\right)\right] ,$$

mit der Airy Funktion

$$\mathrm{Ai}\,(y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + ty\right) dt \,.$$