
7. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

TUTORIUM: Freitag, 25.11.2011.

13. Ehrenfesttheorem, Virialsatz der QM

2+2+1=5 Punkte

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \lambda x^n$$

($n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$).

- Berechnen Sie mithilfe der quantenmechanischen Version der klassischen Bewegungsgleichungen für $n = 0$ und $n = 2$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) die Zeitentwicklung der Erwartungswerte $\langle x(t) \rangle$ und $\langle p(t) \rangle$ und zeigen Sie so die Gültigkeit des Ehrenfestschen Theorems.
- Zeigen Sie, ausgehend von der Heisenbergschen Bewegungsgleichung für den Erwartungswert des Produktoperators xp , dass für stationäre Zustände des Hamilton-Operators und $n \geq 1$ folgende Beziehung (*Virialsatz*) gilt:

$$2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle$$

- Welchen Erwartungswert $\langle p_H^2 \rangle$ bekommt man für $n = 2$ bei gegebenem Erwartungswert der Gesamtenergie $\langle E \rangle$?

14. Zeitentwicklung und Messprozess

2+2+1=5 Punkte

Betrachten Sie ein Zweiniveausystem in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Der Hamilton-Operator des Systems lautet

$$H = -g (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|),$$

wobei g eine reelle, positive Konstante ist. In dieser Basis sei auch die Observable O durch $O = \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$ definiert¹.

Das System befindet sich bei $t = 0$ im ersten Zustand, d.h. $|\Psi(t = 0)\rangle = |1\rangle$.

¹Physikalisch bedeutet dies, dass das System beispielsweise ein magnetisches Spin-Moment bei einem äußeren magnetischen Feld in x -Richtung darstellt und man das Moment in z -Richtung (S_z) messen will (Pauli-Matrizen). Dies wird in späteren Vorlesungen diskutiert.

- a) Berechnen Sie den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Observable O bei $t = t^*$. Welche Messwerte sind für die Observable O möglich, wenn man sie bei $t = t^*$ misst, d.h. welche Messergebnisse werden Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen?
- b) Betrachten Sie nun den Fall, dass bereits bei $t = \frac{t^*}{2}$ eine erste Messung von O gemacht wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden welche möglichen Messwerte bei $t = \frac{t^*}{2}$ gefunden? Wie ändern sich die Ergebnisse von **14 a** (d.h. für die Messung bei $t = t^*$) in Abhängigkeit von den Ergebnissen der Messung bei $t = \frac{t^*}{2}$?
- c) Berechnen Sie nun wie in **14 b** die Wahrscheinlichkeiten und möglichen Messwerte bei $t = \frac{t^*}{2}$ und $t = t^*$ für die Observable Energie, d.h. für H statt O .