10. Übung

19.

a) Mögliche Messwerte für $\mathbf{L}^2$: $\quad \hbar^2 l(l+1)$
Mögliche Messwerte für L_z : $\quad \hbar l, \quad \hbar(l-1) \quad$ und $\quad \hbar(l-2)$

b) $\langle \mathbf{L}^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$
$\langle L_z \rangle = \hbar(l-1)$

c) Standardabweichungen $\qquad \Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$
$\langle \mathbf{L}^4 \rangle = \langle \mathbf{L}^2 \rangle^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{L}^2 = 0$
$\langle L_z^2 \rangle = \hbar^2 \left(l^2 - 2l + \frac{13}{11} \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta L_z = \sqrt{\frac{2}{11}}\hbar$

20.

a) $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m w^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \right] \psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$

Ansatz $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ führt auf

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) + \frac{1}{2} m w^2 x^2 X(x) = E_x X(x)$$

$$\Rightarrow X_{n_x}(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_x} n_x!}} H_{n_x} \left(\sqrt{\frac{mw}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{1}{2}\frac{mw}{\hbar}x^2}, \quad E_x = \hbar w \left(n_x + \frac{1}{2} \right)$$

analog für $Y(y)$ und $Z(z)$, wobei $E = E_x + E_y + E_z = \hbar w \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right)$

b) $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2(\theta,\phi)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m w^2 r^2 \right] \psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi)$

$$\text{Ansatz:} \qquad \psi(r,\theta,\phi) = Y_{lm}(\theta,\phi) R(r)$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m w^2 r^2 \right] R(r) = ER(r)$$

Sturm-Liouville Transformation: $\quad u(r) := r \cdot R(r)$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m w^2 r^2 \right] u(r) = Eu(r)$$

Aus $y := \sqrt{\frac{mw}{\hbar}} r$ und $u\left(\sqrt{\frac{\hbar}{mw}} y \right) =: f(y)$ folgt

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \frac{l(l+1)}{y^2} - y^2 + \frac{2E}{\hbar w} \right] f(y) = 0$$

$$f(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} y^{l+1} g(y) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d^2}{dy^2} + 2\left(\frac{l+1}{y} - y \right) \frac{d}{dy} - 2l - 3 + \frac{2E}{\hbar w} \right] g(y) = 0$$

Substitution $x := y^2$ ($\frac{d}{dy} = 2\sqrt{x}\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dy^2} = 4x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}$) und $g(\sqrt{x}) = h(x)$

$$\Rightarrow \left[x\frac{d^2}{dx^2} + \left(\left(l + \frac{1}{2} \right) - x + 1 \right) \frac{d}{dx} + \underbrace{\left(\frac{E - \frac{3}{2}\hbar w}{2\hbar w} - \frac{l}{2} \right)}_{\in\{0,1,\dots\}} \right] h(x) = 0$$

... Laguerresche Differentialgleichung

$n := \frac{E-\frac{3}{2}\hbar w}{\hbar w} \quad \Rightarrow \quad E_n = \hbar w \left(n + \frac{3}{2} \right)$ mit $l = n, n-2, n-4, \dots$

$$h(x) = L^{l+\frac{1}{2}}_{\frac{n-l}{2}}(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{nl}(r) = N_{nl}\, r^l\, e^{-\frac{1}{2}\frac{mw}{\hbar}r^2}\, L^{l+\frac{1}{2}}_{\frac{n-l}{2}}\left(\frac{mw}{\hbar} r^2 \right)}$$

$N_{nl} = \left[\frac{2^{n+l+2}\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{l+\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2}(n-l)\right]! \left[\frac{1}{2}(n+l)\right]!}{\pi^{\frac{1}{2}}(n+l+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$ folgt aus der Normierung.

c) Die Vielfachheit von $E_N = \hbar w \left(N + \frac{3}{2} \right)$ ist $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

d) Grundzustand ist gleich, die Eigenzustände zu den entarteten Energien spannen jeweils die gleichen Unterräume auf.

Alternative Rechnung zu 20b:

Ansatz aus Hinweis $\frac{P(r)}{r} e^{-\frac{mw}{2\hbar}r^2}$ mit $P(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n$

führt nach lustiger Rechnung auf:

$$l(l+1)\alpha_0 = 0$$

$$l(l+1)\alpha_1 = 0$$

für $n \geq 1$: $\quad [l(l+1) - (n+2)(n+1)]\, \alpha_{n+2} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \right] \alpha_n.$

$\rightarrow$ Abbruch der Reihe bei $n = \frac{E}{\hbar w} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad E = \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right)$

Falls $l \neq 0$ ist α_{l+1} der erste nichtverschwindende Koeffizient.

Gleiche Ergibnisse wie oben:

Niedrigste Energie: $E = \frac{3}{2}\hbar w$ mit $R(r) = \alpha_1 e^{-\frac{mw}{2\hbar}r^2}$ $(l = 0)$

2. Energie: $E = \frac{5}{2}\hbar w$ mit $R(r) = \alpha_2 r e^{-\frac{mw}{2\hbar}r^2}$ ($l = 1$, 3-fache Entartung)