2. Tutorium - Quantentheorie I - 19.10.2012 - Lösung

1. Beantworten Sie folgende Fragen aus der Atomphysik:

   a) Die 1. Ionisierungsenergie (=jene Energie, die notwendig ist, um das am schwächsten gebundene Elektron aus dem Atom zu entfernen) des Lithiumatoms im Grundzustand liegt bei $E_{ion} = 5.391\ eV$. Berechnen Sie die Frequenz und die Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung, die in diesem Fall für die Ionisierung mindestens benötigt wird. Um welche Art von Strahlung handelt es sich dabei?

   b) In der Nähe des Atomkerns kann die Energie eines Photons in ein Elektron-Positron-Paar konvertiert werden. Berechnen Sie die minimale Energie des Photons (in MeV), die für diesen Prozess vonnöten ist. Berechnen Sie wiederum die Frequenz und die Wellenlänge der entsprechenden elektromagnetischen Strahlung.

   c) Ein Argon-Ionen-Laser emittiert monochromatisches Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 514.5\ nm$. Wie viele Photonen werden von dem Laser pro Sekunde emittiert, wenn dieser eine Leistung von $10\ mW$ hat?

2. Betrachten Sie ein gebundenes Teilchen der Masse m im anziehenden Delta-Potential(eindimensionales Problem),

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - A\delta(x) \right]\psi(x) = E\psi(x), \quad A \in R^+$$

   a) Leiten Sie die Übergangsbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion an $x = 0$ ab.

   b) Lösen Sie das Eigenwertproblem mittels eines geeigneten Ansatzes für die Eigenfunktionen $\psi(x)$.

   c) Skizzieren Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes. Gibt es einen ersten angeregten Zustand? Warum (nicht)?

   d) Für welche Werte A gibt es einen gebundenen Zustand? Berechnen Sie die Grundzustandsenergie und die normierte Grundzustandswellenfunktion

3. Ein Teilchen der Masse m befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einer Falle der Länge und Breite d (2-dimensionales Problem, d, $V_0 \in R^+$),

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + V(x) + V(y) \right] \psi(x,y) = E\psi(x,y), \quad V(\xi) \begin{cases} \infty & \xi < 0 \\ -V_0 & 0 < \xi < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie das Potential und machen Sie einen Ansatz für die zeitunabhängige Lösung des Problems. Nutzen Sie die Separation in x und y Koordinaten und stellen Sie die Übergangsbedingungen auf.

b) Geben Sie die implizite Gleichung für die Eigenenergien des Hamiltonoperators an.

c) Bestimmen Sie graphisch die Eigenenergien des Systems. Geben Sie Bedingungen für die Existenz gebundener Zustände an. Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion für die drei niedrigsten Energieniveaus (keine Rechnung).

d) Geben Sie den Entartungsgrad der niedrigsten zwei Energieniveaus an. (Der Grad der Entartung M eines Eigenwertes E_n ist gegeben durch die Anzahl von zueinander linear unabhängigen Eigenvektoren $[\phi_n(x)]_i$, die demselben Eigenwert E_n zugeordnet sind.)

e) Wie verschieben sich die Energieeigenwerte als Funktion von V_0? Interpretieren Sie Ihre Lösung physikalisch.

Zu Kreuzen: 1, 2, 3ab, 3cde

1. a) $E_{photon} = h\nu$

$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ $\qquad h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$ $\qquad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$$E_{ph} = h\nu \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{E_{ph}}{h} = \frac{8.6256 \cdot 10^{-19} J}{6.626 \cdot 10^{-34} Js} = 1.3017 \cdot 10^{15} \frac{1}{s}$$

$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$

$$E_{ion} = 5.391 eV = 5.391 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J = 8.6256 \cdot 10^{-19} J$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \ m/s}{1.3 \cdot 10^{15} \ 1/s} = 2.3 \cdot 10^{-7} m \quad (UV)$$

b) $E_{photon} \xrightarrow{in}$ Elektron-Positronenpaar

Ruheenergie $E_0 = m_0 \cdot c^2$
$Elektron(e^-) : m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$
$Positron(e^+) : m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$

$$E_{0,e^+,e^-} = m_0 \cdot c^2 = 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot (10^8)^2 = 8.19 \cdot 10^{-14} kg \frac{m^2}{s^2} \ [J]$$

$$1MeV = 1 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J = 1.6 \cdot 10^{-13} J$$

$$E_{0,e^+,e^-} = 8.19 \cdot 10^{-14} \frac{MeV}{J} = 0.511875 \ MeV \quad \rightarrow \quad e^+, e^- \} 2 \cdot 0.5118 \ MeV =$$
$$= E_{min} = 1.02375 \ MeV$$

$$E = h\nu \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{E_{min}}{h} = 2.47 \cdot 10^{20} \ \frac{1}{s}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1.21 \cdot 10^{-12} \ m \quad (\gamma - Strahlung)$$

c) $\lambda = 514.5 \ nm$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}}{514.5 \cdot 10^{-9} m} = 5.8 \cdot 10^{14} \ \frac{1}{s}$$

$E_{photon} = h\nu = 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 5.8 \cdot 10^{14} = 38.430 \cdot 10^{-20} J =$ Energie eines Photons

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta W = P \cdot \Delta t = 0.01 \ J$$

$$\Delta W = n \cdot E_{Photon} \quad \rightarrow \quad n = \frac{\Delta W}{E_{Photon}} = \frac{0.01 \ J}{38.43 \cdot 10^{-20} J} =$$

$= 2.6 \cdot 10^{16}$ Photonen pro Sekunde

2. a) - d)**Übergangsbedingung:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

Um symmetrisches Intervall $[-\varepsilon;\varepsilon]$ um $x=0$ integrieren:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)\;dx=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi(x)\;dx$$

$$\underbrace{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\;dx}_{\frac{-\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''\;dx=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}}+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi(x)\;dx=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi(x)\;dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\psi'(\varepsilon)-\psi'(-\varepsilon)\Big]+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}-A\;\delta(x)\psi(x)\;dx=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi(x)\;dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\psi'(\varepsilon)-\psi'(-\varepsilon)\Big]-A\psi(0)=\underbrace{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi(x)\;dx}_{=0\ \text{ für }\ \varepsilon\to 0}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\psi'(0)-\psi'(-0)\Big]-A\psi(0)=0$$

$$\psi'(0)-\psi'(-0)+\lambda\psi(0)=0\qquad\qquad\lambda=\frac{2mA}{\hbar^2}$$

Ansatz:

$$\psi(x)=C_1\cdot e^{\kappa x}+C_2\cdot e^{-\kappa x}$$

$$H\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=E\psi(x)$$

$\psi'(x)=\kappa\cdot e^{\kappa x}-\kappa\cdot e^{-\kappa x}$
$\psi''(x)=\kappa^2\cdot e^{\kappa x}+\kappa^2\cdot e^{-\kappa x}=\kappa^2\psi(x)$

$$\longrightarrow-\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2\psi(x)=E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2=E\qquad\to\qquad\kappa^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$\psi(x)$ muss stetig bei $x=0$ und normierbar sein

$$x>0:\psi_+(x)=C_2\cdot e^{-\kappa x}$$
$$x<0:\psi_-(x)=C_1\cdot e^{\kappa x}$$

Stetigkeit bei $x = 0$:

$$C_1 = C_2 \qquad \rightarrow \qquad \psi(x) = C_1 \cdot (e^{\kappa x} + e^{-\kappa x})$$

Übergangsbedingung bei $x = 0$:

$$\psi'_+(0) - \psi'_-(-0) + \lambda\psi(0) = 0$$

$$-\kappa C e^{-\kappa 0} - \kappa C e^{\kappa 0} + \lambda C e^0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \kappa = \frac{\lambda}{2}$$

$$\kappa = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{mA}{\hbar^2}$$

$$\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{mA}{\hbar^2} \qquad \rightarrow \qquad E = -\frac{mA^2}{2\hbar^2}$$

$$\psi(x) = C \cdot e^{-\kappa|x|}$$

Normierung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| \; dx =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (C\ e^{\kappa x})^2 \; dx + \int_0^\infty (C\ e^{-\kappa x})^2 \; dx \qquad \rightarrow \qquad c = \frac{\sqrt{mA}}{\hbar^2}$$

3. a) **Übergangsbedingungen:**

$$\psi_{Ix}(0) = \psi_{IIx}(0) \qquad \psi_{IIx}(d) = \psi_{IIx}(d)$$
$$\psi_{Iy}(0) = \psi_{IIy}(0) \qquad \psi_{IIy}(d) = \psi_{IIy}(d)$$

Allgemein gilt: $$H_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_i^2} + V_i(x)$$

$$H(x,y) = H_x + H_y \begin{cases} H_x(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \\ H_x(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \end{cases}$$

$$Produktansatz: \ \psi(x,y) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y)$$

$$H(x,y)\ \psi(x,y) = E\psi(x,y)$$

$$\Big(H_x + H_y\Big)\psi_x \cdot \psi_y = E\ \psi_x \cdot \psi_y$$

Wobei H_i nur auf ψ_i wirkt!

$$\psi_y H_x \psi_x + \psi_x H_y \psi_y = E\psi_x\psi_y \qquad \Big/ : \psi_x\psi_y$$

$$\underbrace{\frac{H_x\psi_x}{\psi_x}}_{E_x} + \underbrace{\frac{H_y\psi_y}{\psi_y}}_{E_y} = E$$

$H_x\psi_x = E_x\psi_x$
Ansatz:

$$\psi_x(x) = A\ sin(kx) + B\ cos(kx)$$
$$\psi_x'(x) = A\ k\ cos(kx) - B\ k\ sin(kx)$$
$$\psi_x''(x) = -A\ k^2\ sin(kx) - B\ k^2\ cos(kx) = -k^2\psi_x(x)$$

Für gebundene Zustände gilt: $|E| - |V| < 0$

$$E = -|E| \qquad |V| > |E|$$
$$V = -|V| \qquad (-|E| + |V| > 0)$$

b) Bereich $x < 0 : \psi_I(x < 0) = 0$
Bereich x > d: $\psi_{III} = C \cdot e^{-\kappa' x}$
Im Bereich III ist $V(x) = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_x''(x) = E_x\ \psi(x)$$

$$\psi_x''(x) = C\ (\kappa')^2\ e^{-\kappa' x} = (\kappa')^2\ \psi_x(x)$$

Einsetzen in die SGL ergibt:

$$\kappa' = \sqrt{\frac{2m|E_x|}{\hbar^2}}$$

Ansatz im Bereich II(0 < x < d): Schwingende Lösungen:

$$\psi_{II}(x) = A\ e^{i\kappa x} + B\ e^{-i\kappa x}$$

$$\psi_{II}''(x) = -\kappa^2\ \psi_{II}(x)$$

Einsetzen von $\psi_{II}(x)$ und $\psi_{II}''(x)$ in die SGL:

$$\kappa = \sqrt{\frac{(E_x - V(x)) \cdot 2m}{\hbar^2}}$$

Stetigkeit von $\psi(x)$ bei $x = 0$ zwischen $\psi_I(x = 0)$ und $\psi_{II}(x = 0)$ $\rightarrow$ $\psi_I(x = 0) = \psi_{II}(x = 0)$

$$A = -B$$

$$\psi_{II}(x) = A\Big(e^{i\kappa x} - e^{-i\kappa x}\Big) = \underbrace{2\ i\ A}_{=\tilde{A}}\ sin(\kappa x) = \tilde{A}\ sin(\kappa x)$$

Stetigkeit von $\psi(x)$ bei $x = d$ zwischen ψ_{II} und ψ_{III}:

$$\psi_{II}(x = d) = \psi_{III}(x = d)$$

$$C \cdot e^{-\kappa' d} = \tilde{A}\ sin(\kappa d)$$

Bei Unstetigkeit im Potential(endlichen Sprüngen): Ableitungen müssen stetig sein

$$\psi_{II}'(x = d) = \psi_{III}'(x = d)$$

$$-\tilde{A}\ \kappa\ cos(\kappa d) = -\kappa'\ C\ e^{-\kappa' d}$$

$$C \cdot e^{-\kappa' d} = \tilde{A} \cdot sin(\kappa d) \qquad \Big/ : \Big(-C\ \kappa'\ e^{-\kappa d} = \tilde{A}\ cos(\kappa d)\Big)\ \kappa$$

$$-\frac{C\ e^{-\kappa' d}}{C\ \kappa' e^{-\kappa' d}} = \frac{\tilde{A}\ sin(\kappa d)}{\tilde{A}\ cos(\kappa d)} \cdot \frac{1}{\kappa}$$

$$-\frac{1}{\kappa'} = tan(\kappa d) \cdot \frac{1}{\kappa}$$

$$\kappa' = -\kappa\ cot(\kappa d) \qquad\qquad \kappa' = f(\kappa)$$

$$\kappa^2 + (\kappa')^2 = \ldots = \frac{2m|V|}{\hbar^2}$$

Bildet eine Kreisgleichung. Der Radiushängt von $|V|$ ab!

c)

d)

e)