3. Tutorium - Quantentheorie I - 09.11.2012

1. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, das durch zwei Delta-Funktionen gebunden wird:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x+a) - \frac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x-a), \qquad D > 0,\ a > 0 \tag{1}$$

   (a) Gehen Sie davon aus, dass durch die Symmetrie des Potentials $V(x)$ die gebundenen Wellenfunktionen gerade bzw. ungerade sein müssen. Bestimmen Sie die Bedingungen für die Existenz (i) der geraden und (ii) der ungeraden gebundenen Zustände. Verwenden Sie für die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion an den Stellen $x = \pm a$ jene aus den Ergebnissen von Bsp. 2 der vorigen Woche.

   (b) Zeigen Sie durch graphisches Lösen der Eigenwertbedingungen aus a), dass es immer mindestens einen gebundenen Zustand gibt. Unter welchen Bedingungen gibt es (i) zwei oder (ii) mehr als zwei gebundene Zustände?

   (c) Skizzieren Sie den Verlauf der gebundenen Zustände für verschiedene Werte von a und diskutieren Sie das Resultat physikalisch.

   (d) Diskutieren Sie die Ergebnisse dieses Beispiels im Kontext von kovalenter Bindung eines zweiatomigen Moleküls. Motivieren Sie qualitativ auf Basis Ihrer Ergebnisse, warum ein molekularer Bindungszustand energetisch günstiger ist als der Zustand zweier ungebundener Atome.
   Hinweis: Berücksichtigen Sie qualitativ auch die elektrostatische der beiden Kerne.

2. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $V(x)$.

   (a) Es soll gezeigt werden, dass für beliebige Potentiale $V(x)$ die *gebundenen* (stationären) Zustände des Teilchens nicht entartet sein können: Zu jeder Eigenenergie E_n existiert nur genau ein einziger linear unabhängiger Eigenzustand $\phi_n(x)$ (sh. Definition von Entartung aus Bsp. 3 der vorigen Woche).
   Gehen Sie zu Beginn Ihrer Beweisführung davon aus, dass Sie zwei Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1, [\phi_n(x)]_2$ zum selben Eigenwert E_n besitzen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\phi_n''(x)]_i + V(x)[\phi_n(x)]_i = E_n[\phi_n(x)]_i \quad \text{mit} \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

   Zeigen Sie, dass Sie davon ausgehend zu folgender Beziehung gelangen können:

$$[\phi_n(x)]_2[\phi_n'(x)]_1 - [\phi_n(x)]_1[\phi_n'(x)]_2] = C\ . \tag{3}$$

   Um den gesuchten Beweis zu erbringen, bestimmen Sie zuerst die Konstante C und zeigen Sie anhand von Gl. (3), dass die beiden Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1,\ [\phi_n(x)]_2$ voneinander linear abhängig sind.
   Hinweis: Für einen gebundenen Zustand gilt, dass seine Wellenfunktion $\phi_n(x) \longrightarrow 0\ f\ddot{u}r\ x \ \rightarrow\ \pm\infty$

   (b) Beweisen Sie, dass bei eindimensionalen Potentialen gebundene Wellenfunktionen immer reell gewählt werden können.
   Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Punkt a) für Ihren Beweis.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte und den Erwartungswert des Impulses für die gebundenen Wellenfunktionen von oben. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

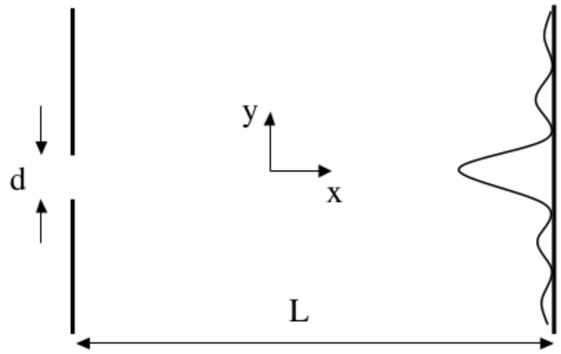


Abbildung 1: Experiment zur Beugung am Spalt.

3. Betrachten Sie den in der Abbildung 1 dargestellten Aufbau für die Beugung eines von links einfallenden Stroms von Teilchen an einem Spalt mit der Breite d. Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion der Teilchen direkt am Spalt ($x = x_0$) durch eine kastenförmige Welle beschrieben wird, die sich in Einfallsrichtung x wie eine ebene Welle mit Impuls $\hbar k_0$ bewegt,

$$\psi(x, y) \;=\; \begin{cases} exp(ik_0 x)/\sqrt{d} & -d/2 \leq y \leq d/2 \\ 0 & |y| \geq d/2 \end{cases}$$

Die Teilchen werden auf einem Schirm gemessen, der sich in einem Abstand L vom Spalt befindet.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $\psi(x, y)$ im Spalt ($x = x_0$). Überprüfen Sie, ob die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort y und Impuls p_y erfüllt ist.

Hinweis: Schätzen Sie die Unschärfen σ_y , σ_{py} der Einfachheit halber mit dem Abstand zwischen den ersten beiden Nullstellen der jeweiligen Funktionen ab.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(y)$ ein Teilchen an der Position y des Schirms (bei festem $x = x_0 + L$) zu messen (unter der Annahme dass $L \ll d$, y und dass zwischen Spalt und Schirm kein Potential auf das Teilchen wirkt). Verwenden Sie dabei, dass die Impulsverteilung der Teilchen in y-Richtung über die Fourier-Transformierte aus (a) bestimmt werden kann. Reproduzieren Sie damit das bekannte Resultat aus der Beugungstheorie,

$$P(y) = C\Big[\frac{sin(Ay)}{Ay}\Big]^2$$

Bestimmten Sie die Konstanten A, C.

(c) Erläutern Sie Ihr Ergebnis für $P(y)$ anhand des Huygensschen Prinzips (siehe dazu optische Beugung am Spalt).

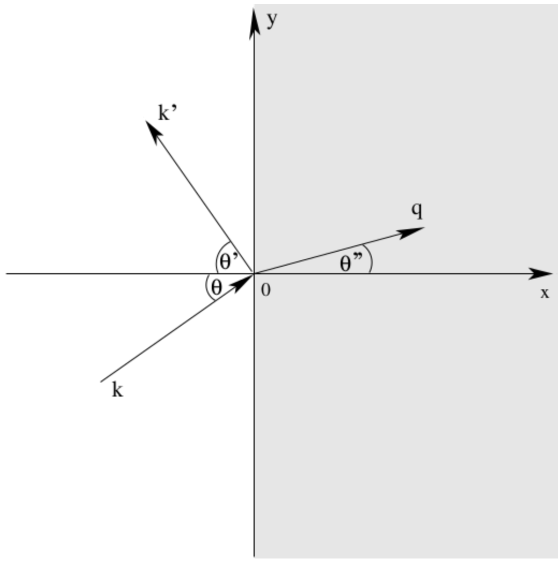


Abbildung 2: Lage der Wellenvektoren der einfallenden, reflektierten und transmittierten ebenen Wellen.

4. Betrachten Sie einen Teilchenstrom in zwei Dimensionen, der bei $x = 0$ auf eine Potentialstufe der Höhe V trifft (siehe Abbildung 2). Die Energie des Teilchenstroms ist $E > V$ und das Potential $V(x, y)$ ist entsprechend gegeben durch:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V, & x > 0 \end{cases} \quad \forall y \in \mathcal{R}$$

Der einfallende Teilchenstrom wird beschrieben durch eine ebene Welle der Form $\Psi_i(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$. Die reflektierten und transmittierten Wellenfunktionen sind

$$\Psi_r(\vec{x}, t) = Be^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)} \text{ und } \Psi_t(\vec{x}, t) = Ce^{i(\vec{q}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Die Wellenvektoren der einfallenden, reflektierten und transmittierten ebenen Wellen sind, wie in Abbildung 2 illustriert, gegeben durch:

$$\vec{k} = k(\vec{e}_x \; cos \; \theta + \vec{e}_y \; sin \; \theta)$$
$$\vec{k'} = k'(-\vec{e}_x \; cos \; \theta' + \vec{e}_y \; sin \; \theta')$$
$$\vec{q'} = q(\vec{e}_x \; cos \; \theta'' + \vec{e}_y \; sin \; \theta'')$$

(a) Zeigen Sie, dass der Einfallswinkel θ gleich dem Ausfallwinkel θ' ist. Zeigen Sie weiters die Gültigkeit des Snelliusschen Brechungsgesetzes $\frac{sin \; \theta''}{sin \; \theta} = n$, wobei sin der Brechungsindex durch $n = \frac{k}{q}$ definiert ist.

(b) Berechnen Sie die Koeffizientenverhältnisse $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$.

(c) Berechnen Sie die einfallende, reflektierte und transmittierte Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{J}_i$, $\vec{J}_r$ und $\vec{J}_t$.

(d) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten T und den Reflexionskoeffizienten R und überprüfen Sie explizit dass gilt: $T + R = 1$.

1. (a) Allgemein gilt:

$$\psi(r) = \psi(-r) \quad \longrightarrow \quad \psi(r) = gerade$$
$$\psi(r) = -\psi(-r) \quad \longrightarrow \quad \psi(r) = ungerade$$

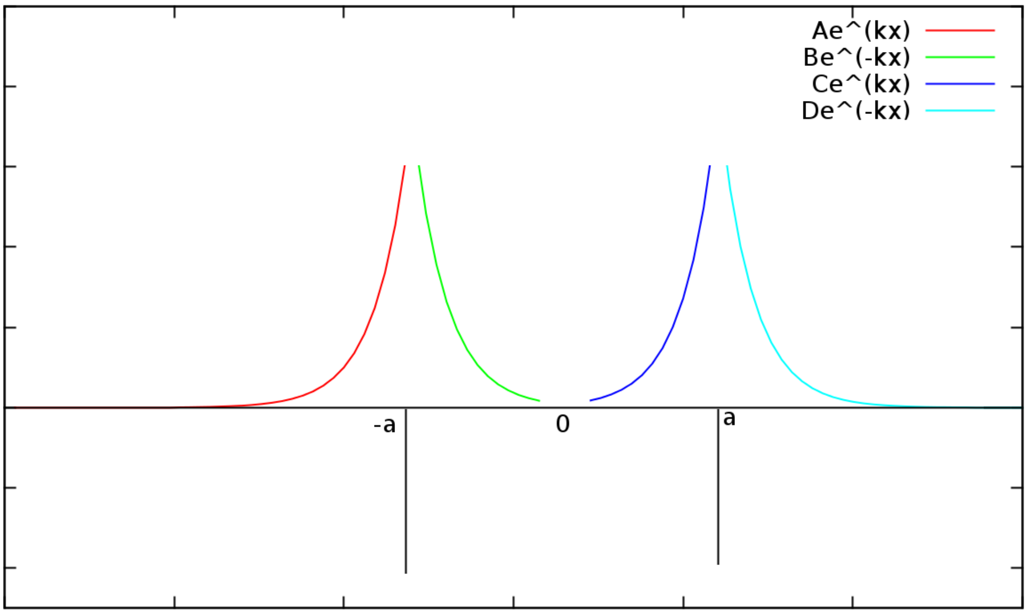
Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist definiert mit:

$$\hat{P}\ \psi(x) = \psi(-x)$$

$$gerade\ Wellenfunktion \longrightarrow \hat{P}\ \psi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(x)$$
$$ungerade\ Wellenfunktion \longrightarrow \hat{P}\ \psi^{(-)}(x) = -\psi^{(-)}(x)$$

1. gerade Lösungen:

$$\begin{aligned} -\infty < x < -a &: \Psi_1^l(x) = A\ e^{kx} \\ -a < x < 0 &: \Psi_1^r(x) = B\ e^{-kx} \\ a > x > 0 &: \Psi_2^l(x) = C\ e^{kx} \\ +\infty > x > +a &: \Psi_2^r(x) = D\ e^{-kx} \end{aligned}$$



Stetigkeitsbedingungen von $\Psi(x)$ an x = 0:

Das Potential ist symmetrisch: Die Funktion $\Psi(x)$ ist gerade und geht durch $x = o$:

$\Psi_1^r(x=0) = \Psi_2^l(x=0)$

$\longrightarrow B = C$

Die Wellenfunktion im Bereich $-a < x < a$ ist nun: $\Psi_{12}(x) = B(e^{-kx} + e^{kx})$

Stetigkeit von $\Psi_1(x)$ an x = -a und $\Psi_2(x)$ and x=a:

$\Psi_1^l(x=-a) = \Psi_{12}(x=-a)$

$\Psi_{12}(x=a) = \Psi_2^r(x=a)$

Stetigkeitsbedingungen der Ableitungen:

$$SGL: -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi$$

$\Psi_{12}(x=a)$

integrieren um ein symmetrisches Intervall ε um $V(x)$ wobei $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\bar{D}\delta(x+a)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}\,dx - \int\limits_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\frac{\hbar^2}{m}\bar{D}\delta(x+a)\,dx = E\int\limits_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\Psi(x)\,dx$$

Die rechte Seite der Gleichung ist Null und übrig bleibt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\Psi'(-a+\varepsilon) - \Psi'(-a-\varepsilon)\Big] - \frac{\hbar^2}{m}\bar{D}\Psi(-a) = 0$$

Die Delta-Distribution hat das Integral "ausgewertet"

$$-\frac{1}{2}\Big[\Psi'(-a+\varepsilon) - \Psi'(-a-\varepsilon)\Big] - \bar{D}\Psi(-a) = 0$$

Grenzübergang von $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$-\frac{1}{2}\Big[\Psi_r'(-a) - \Psi_l'(-a)\Big] + \bar{D}\Psi(-a) = 0$$

Der Faktor 2 wird in $\bar{D}$ hineingezogen:

$$\Psi_r'(-a) + \Psi_l'(-a) + \bar{D}\Psi(-a) = 0$$

Wobei $\Psi_r'(-a)$ und $\Psi_l'(-a)$ die jeweiligen Wellenfunktionen links/rechts von der Delta-Distribution ist

Die Bedingungen für die beiden Seiten (±a) sind:

$$\Psi_r'(\pm a) - \Psi_l'(\pm a) + \bar{D}\Psi(\pm a) = 0$$

Im Bereich $-a < x < a$ können wir die WF anschreiben mit:

$\Psi_{12}(x) = B(e^{-kx} + e^{kx}) = 2Bcosh(kx) = \bar{B}cosh(x)$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\Psi_1^l(x) = A\;k\;e^{kx}$$
$$\frac{d}{dx}\Psi_{12}(x) = \bar{B}\;k\;sinh(kx)$$
$$\frac{d}{dx}\Psi_2^r(x) = -D\;k\;e^{-kx}$$

Stetigkeit:

$$\textbf{x = -a: } \Psi_1^l(x=-a) = \Psi_{12}(x=-a)$$

$$A\;e^{-ka} = \bar{B}\;cosh(-ka) \;\longrightarrow\; e^{-ka} = \tilde{B}\;cosh(-ka)\;mit\;\tilde{B} = \frac{\bar{B}}{A}$$

$$\textbf{x = a: } \Psi_2^r(x=a) = \Psi_{12}(x=a)$$

$$D\;e^{-ka} = \bar{B}\;cosh(ka) \;\longrightarrow\; e^{-ka} = \tilde{D}\;cosh(-ka)\;mit\;\tilde{D} = \frac{\bar{B}}{D}$$

Stetigkeit der Ableitungen bei x = -a:

$$\Psi_{12}{}'(x=-a) - \Psi_1^l{}'(x=-a) + \bar{D}\;\Psi_{12}(x=-a) = 0$$

$$\bar{B}\ k\ sinh(-ak) - A\ k\ e^{-ak} + \bar{D}\ \bar{B} cosh(-ak) = 0$$

$$sinh(-ak) - \frac{A}{\bar{B}}\ e^{-ak} + \frac{\bar{D}}{k}\ cosh(-ak) = 0$$

$$\frac{A}{\bar{B}} = cosh(-ak)\ e^{-ak}\ einsetzen:$$

$$sinh(-ak) - cosh(-ak)\ e^{ak}\ e^{-ak} + \frac{\bar{D}}{k}\ cosh(-ak) = 0$$

$$\frac{sinh(-ak)}{cosh(-ak)} = 1 - \frac{\bar{D}}{k}$$

$$tanh(-ak) = 1 - \frac{\bar{D}}{k}$$

Stetigkeit der Ableitungen bei x = a:

$$\Psi_2^{r\prime}(x=a) - \Psi_{12}{}'(x=a) + \bar{D}\ \Psi_{12}(x=a) = 0$$

$$-D\ k\ e^{-ak} - \bar{B}\ k\ sinh(ak) + \bar{D}\ \bar{B}\ cosh(ak) = 0$$

$$-\frac{D}{\bar{B}}\ e^{-ak} - sinh(ak) + \frac{\bar{D}}{k}\ cosh(ak) = 0$$

$$\frac{D}{\bar{B}} = cosh(ak)\ e^{ka}\ einsetzen$$

Die Beziehungen $\frac{D}{\bar{B}}$ und $\frac{A}{\bar{B}}$ kommen von den Stetigkeitsbedingungen.

$$-cosh(ak)\ e^{ak}\ e^{-ak} - sinh(ak) + \frac{\bar{D}}{k}\ cosh(ak) = 0$$

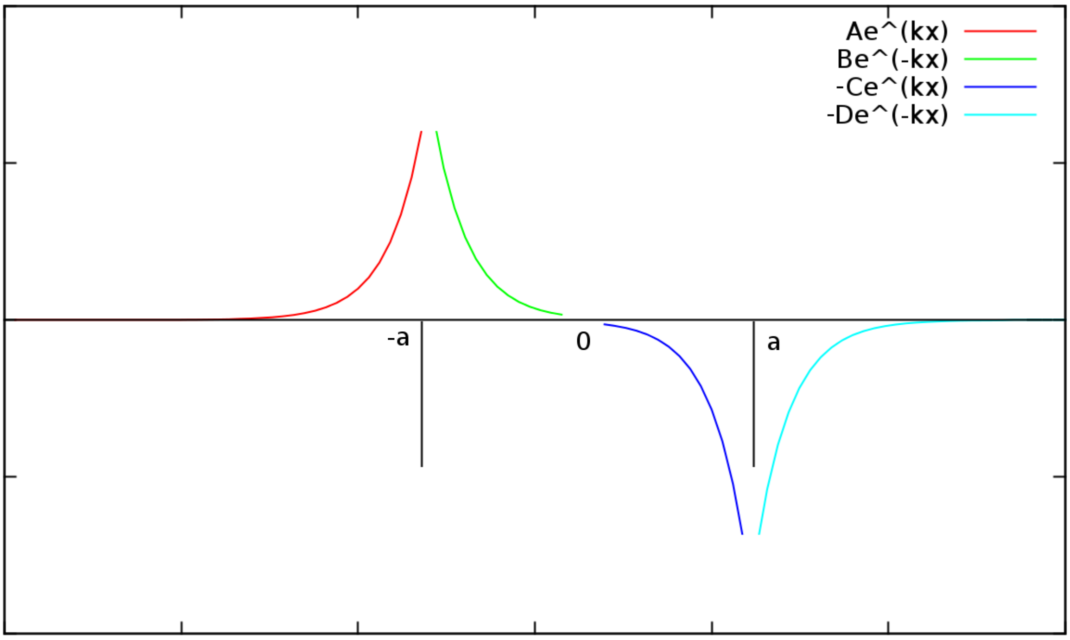
$$-1 - \frac{sinh(ak)}{cosh(ak)} + \frac{\bar{D}}{k} = 0$$

$$tanh(ak) = -1 + \frac{\bar{D}}{k}$$

$tanh(ak) = -tanh(-ak)$ da der Tanh. ungerade ist.
Damit folgt das selbe Ergebnis wie bei x = -a !

1. ungerade Lösungen:

$$\begin{aligned} -\infty < x < -a \;&:\; \Psi_1^l(x) = A\ e^{kx} \\ -a < x < 0 \;&:\; \Psi_1^r(x) = B\ e^{-kx} \\ a > x > 0 \;&:\; \Psi_2^l(x) = -C\ e^{kx} \\ +\infty > x > +a \;&:\; \Psi_2^r(x) = -D\ e^{-kx} \end{aligned}$$



Stetigkeit von Ψ:

- $\Psi_1^l(x=-a) = \Psi_1^r(x=-a) \longrightarrow Ae^{-ka} = Be^{ka}$
- $\Psi_2^l(x=a) = \Psi_2^r(x=a) \longrightarrow -Ce^{ka} = -De^{-ka}$
- $\Psi_1^r(x=0) = \Psi_2^l(x=0) \longrightarrow B - C = 0 \longrightarrow B = C$

Im Bereich $-a < x < a$ können wir die WF als sinh anschreiben:

$$\Psi_{12}(x) = Be^{-kx} - Ce^{kx} = B(e^{-kx} - e^{kx}) = -2Bsinh(kx)$$

Stetigkeit der Ableitungen:

$$\Psi_r'(-a) - \Psi_l'(-a) + \bar{D}\Psi(-a) = 0$$

Stetigkeit bei x=-a:

$\Psi_1^l(x=-a) = \Psi_{12}(x=-a)$

$$Ae^{-ka} = -2Bsinh(-ka) \longrightarrow \frac{A}{B} = -2sinh(-ka) \cdot e^{ka}$$

Aus der Stetigkeit bei x=-a folgt:

$$\Psi_{12}'(-a) - (\Psi_1^l)'(-a) + \bar{D}(-2Bsinh(-ka)) = 0$$

$$-2Bkcosh(-ka) - kAe^{-ka} - \bar{D}2Bsinh(-ka) = 0$$

$$-2cosh(-ka) - \frac{A}{B}e^{-ka} - 2\frac{\bar{D}}{k}sinh(-ka) = 0$$

$$-2cosh(-ka) + 2sinh(-ka)e^{ka}e^{-ka} - 2\frac{\bar{D}}{k}sinh(-ka) = 0$$

$$-2\frac{cosh(-ka)}{sinh(-ka)} + 2 - 2\frac{\bar{D}}{k} = 0$$

Daraus folgt die Bedingung für die Existenz von gebundenen ungeraden Zuständen:

$$\frac{1}{tanh(ka)} = -1 + \frac{\bar{D}}{k}$$

(b) Bilder:

```
Symmetrische :
Plot[{Tanh[0.2 * x], Tanh[0.8 * x], Tanh[1.5 * x], Tanh[3 * x], Tanh[5 * x], -1 + (1 / x)}, {x, 0, 2 }] (* Verschiedene a *)
```

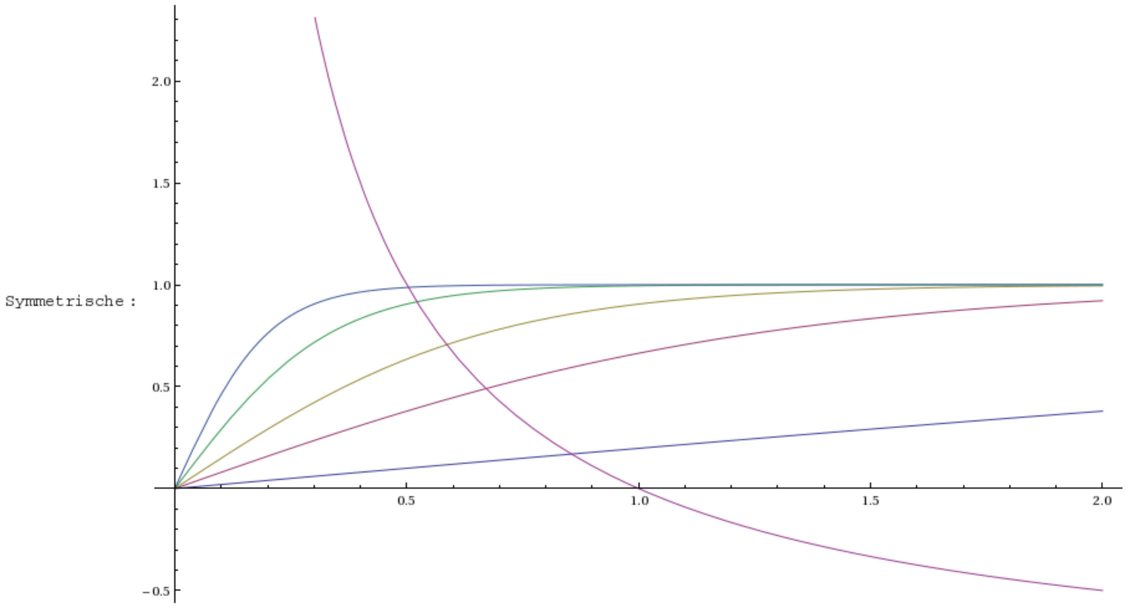


Abbildung 3: Loesung der impliziten Gl. fuer gerade Loesungen fuer versch. a

(c) Leicht zu sehen: Es gibt immer einen gebundenen Zustand.
Einen antisymmetrischen Zustand gibt es aber nicht immer:
Die implizite Gleichung der antisymm. Bindung lautet:

$$\underbrace{coth(ka)}_{>1} = -1 + \frac{\bar{D}}{k} = -1 + \frac{\bar{D}a}{ka}$$

Der coth muss immer grösser als 1 sein. Daraus folgt für die reche Seite der Gleichung:

$$-1 + x > 1 \text{ oder } \frac{\bar{D}}{k} > 2$$

Das sieht man auch leicht, wenn man sich die Bedingung plottet

```
Plot [{2*E^(-2*Abs[x+0.5])+2*E^(-2*Abs[x-0.5])}, {x, -5, 5}] (* gerade Wellenfunktion kleine a*)
```

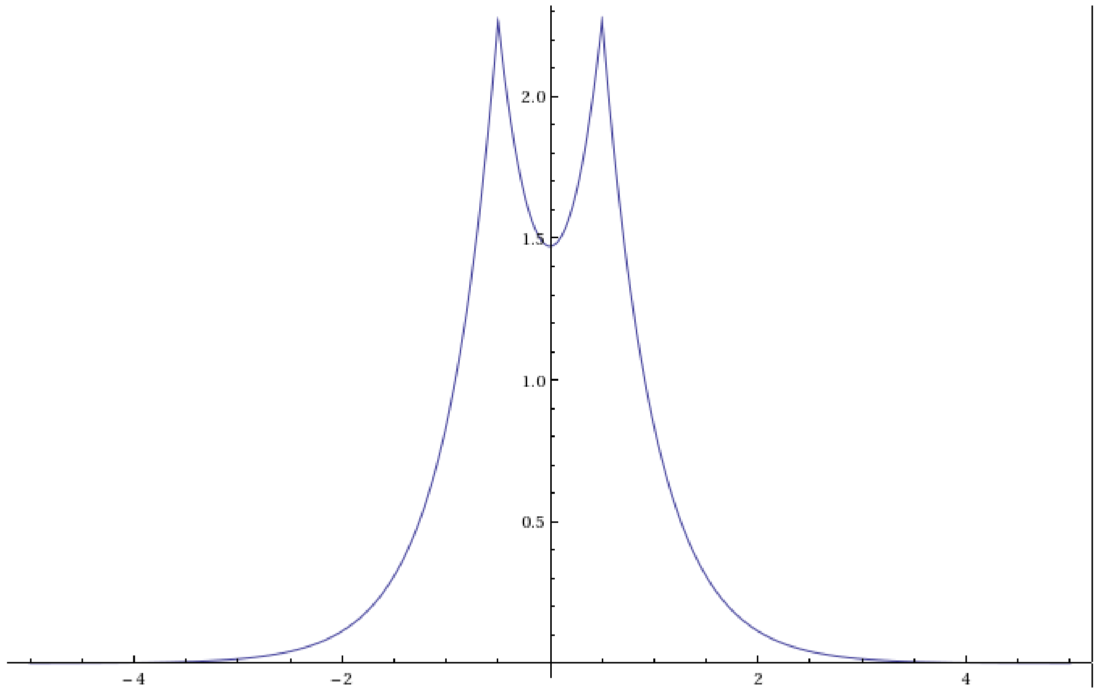


Abbildung 4: gerade WF, kleines a

```
Plot [{2*E^(-2*Abs[x+5])+2*E^(-2*Abs[x-5])}, {x, -10, 10}](* gerade Wellenfunktion große a*)
```

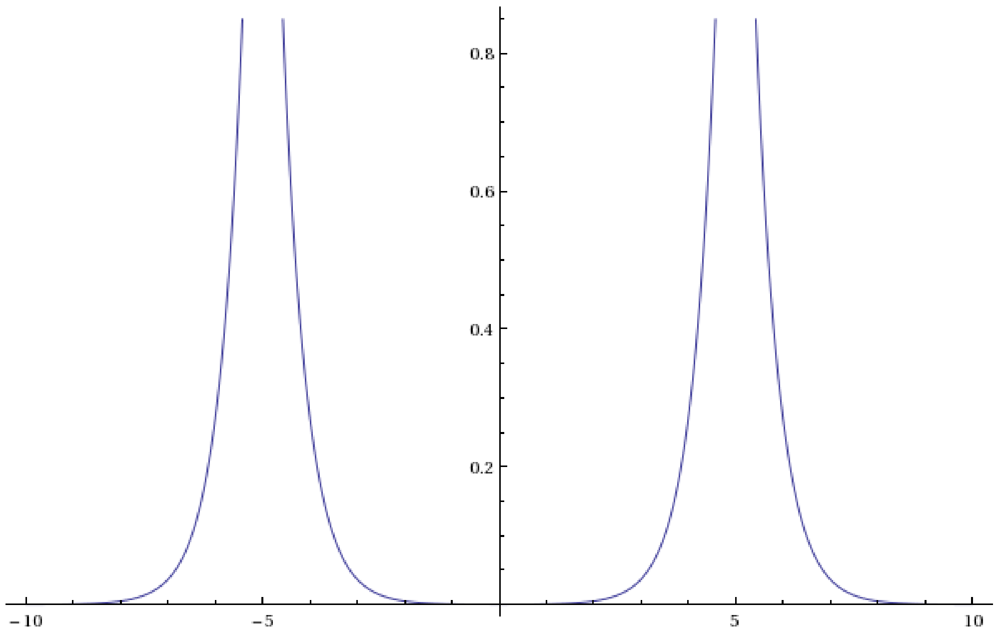


Abbildung 5: gerade WFm groes a

Je kleiner a, desto mehr wird aus den zwei Delta-Peaks ein einziger.

Der coth(x$\longrightarrow x$) divergiert. Es ist keine Lösung möglich.

Bei der geraden Lös. geht für x gegen Null die Lösung gegen einen Deltapeak.

(d) Bei der Aufenthaltswahrscheinlichkeit für eine antisymmetrische Lösung hat das Elektron bei x=0 eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Null.

Es will dort nicht sein, bzw. ist dort nicht anzutreffen.

```
Plot [{(2*E^(-2*Abs[x+0.5])+2*E^(-2*Abs[x-0.5]))^2}, {x, -5, 5}, PlotRange -> {{-4, 4}, {0, 6}}]
(* gerade Wahrscheinlichkeitsdichte kleine a *)
```

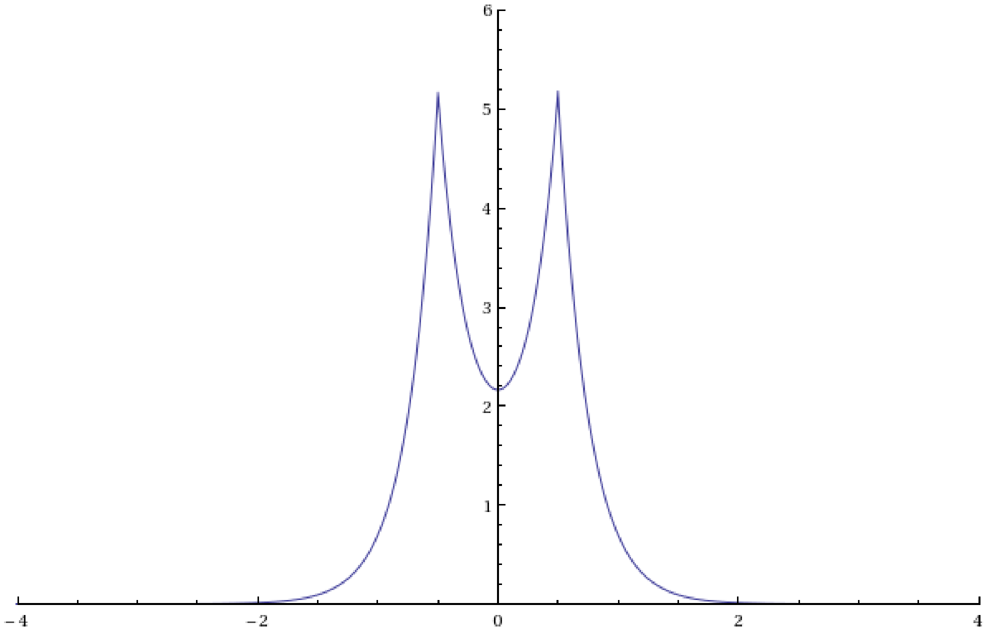


Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsdichte, kleines a, gerade WF

```
Plot [{2*E^(-2*Abs[x+5])-2*E^(-2*Abs[x-5])}, {x, -10, 10}, PlotRange -> {{-10, 10}, {-2, 2}}]
(* UNgerade Wellenfunktion große a*)
```

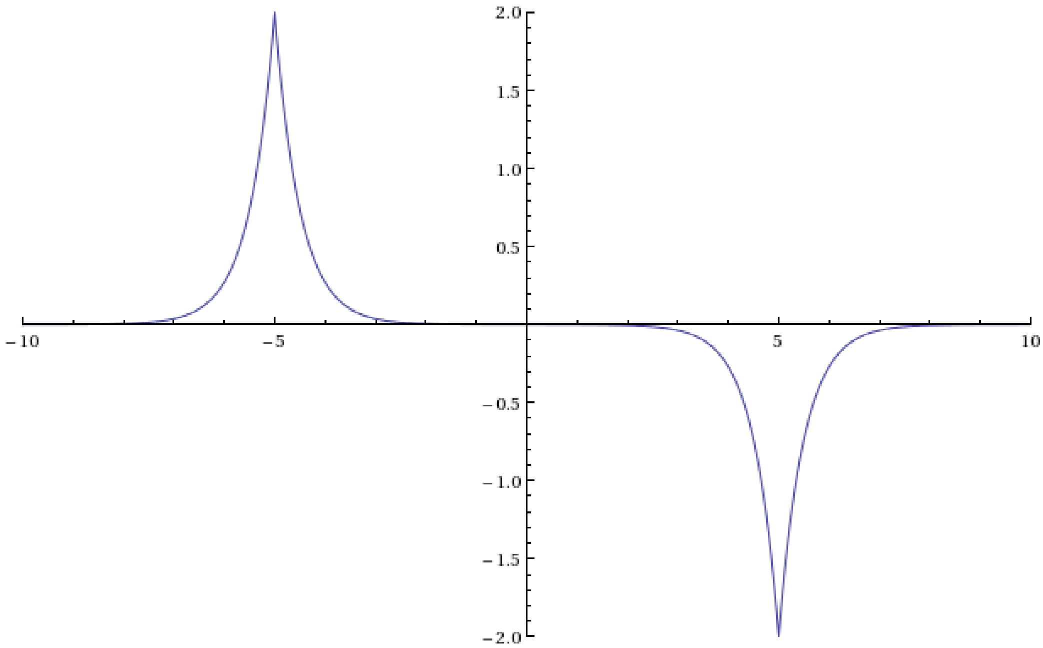


Abbildung 7: ungerade WF, grosse a

Bei der geraden Lösung schaut das anders aus:

Das Elektron ist hier auch in der Mitte. Es schirmt die Abstossenden Kräfte ab, die von den Kernen(bei x$\pm a$) ausgehen. Dadurch sinkt die Abstossende Kraft und deswegen wird der symmetrische Zustand als bindend und der antisymmetrische als antibindend bezeichnet.

```
Plot[{(2*E^(-2*Abs[x+0.5]) - 2*E^(-2*Abs[x-0.5]))^2}, {x, -5, 5}, PlotRange -> {{-3, 3}, {0, 3}}]
(* UNgerade Wahrscheinlichkeitsdichte kleine a*)
```

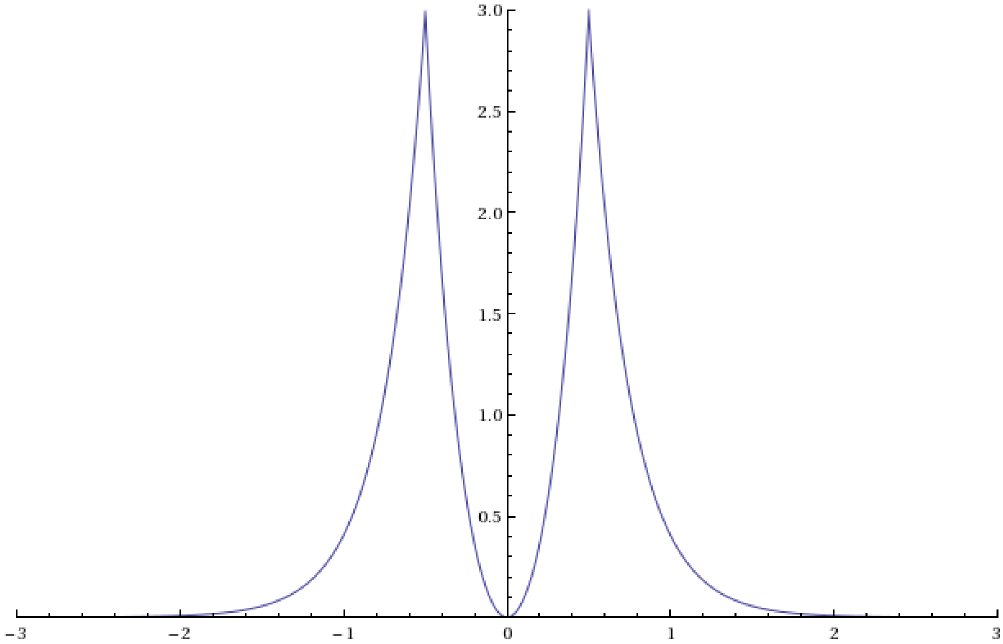


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsdichte, kleines a, ungerade WF

2. (a)
$$[\phi_n(x)]_1, [\phi_n(x)]_2 \longrightarrow \text{2 Eigenfunktionen mit dem selben Eigenwert} E_n$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\phi_n''(x)]_i + V(x)[\phi_n(x)]_i = E_n[\phi_n(x)]_i \qquad i = 1, 2$$

Damit können wir zwei Gleichungen aufstellen:

$$EW\ 1 \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}[\phi_n''(x)]_1 + V(x)[\phi_n(x)]_1 = E_n[\phi_n(x)]_1 \tag{4}$$

$$EW\ 2 \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}[\phi_n''(x)]_2 + V(x)[\phi_n(x)]_2 = E_n[\phi_n(x)]_2 \tag{5}$$

(4) und (5) jeweils durch $[\phi_n(x)]_1$ und $[\phi_n(x)]_2$ dividieren:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{[\phi_n''(x)]_1}{[\phi_n(x)]_1} + V(x) = E_n$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{[\phi_n''(x)]_2}{[\phi_n(x)]_2} + V(x) = E_n$$

Die beiden Gleichungen subtrahieren:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{[\phi_n''(x)]_1}{[\phi_n(x)]_1} - \frac{[\phi_n''(x)]_2}{[\phi_n(x)]_2}\right) = 0$$

$$[\phi_n''(x)]_1 \cdot [\phi_n(x)]_2 - [\phi_n''(x)]_2 \cdot [\phi_n(x)]_1 = 0$$

Was sich umformen lässt zu:

$$\frac{d}{dx}\Big([\phi_n(x)]_2 \cdot [\phi_n'(x)]_1 - [\phi_n'(x)]_2 \cdot [\phi_n(x)]_1\Big)$$

Die Gleichung integrieren:

$$[\phi_n(x)]_2 \cdot [\phi_n'(x)]_1 - [\phi_n'(x)]_2 \cdot [\phi_n(x)]_1 = C$$

Wobei für die Integrationskonstante $C \neq f(x)$ gilt!
Im Falle gebundener Zustände verschwinden die Wellenfunktionen und ihre Ableitungen im Unendlichen. Somit folgt:

$$[\phi_n(x)]_2 \cdot [\phi_n'(x)]_1 = [\phi_n'(x)]_2 \cdot [\phi_n(x)]_1$$

$$\frac{[\phi_n'(x)]_1}{[\phi_n(x)]_1} = \frac{[\phi_n'(x)]_2}{[\phi_n(x)]_2}$$

$$\frac{d}{dx} ln([\phi_n(x)]_1) = \frac{d}{dx} ln([\phi_n(x)]_2)$$

Das ganze integriert:

$$ln([\phi_n(x)]_1) = ln([\phi_n(x)]_2) + D$$

$$[\phi_n(x)]_1 = e^{ln([\phi_n(x)]_2)+D} = [\phi_n(x)]_2 \cdot e^d$$

$$[\phi_n(x)]_1 \propto [\phi_n(x)]_2$$

Die beiden Wellenfunktionen sind bis auf einen Phasenfaktor physikalisch ident.

(b) Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

konjugiert komplexe Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x) + V(x)\psi^*(x) = E\psi^*(x)$$

Selbe wie bei (a):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V - E = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''^*(x)}{\psi^*(x)} + V - E = 0$$

Die beiden Gleichungen miteinander abziehen:

$$\Longrightarrow -\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + \frac{\psi''^*(x)}{\psi^*(x)} = 0$$

$$\psi''(x)\psi^*(x) - \psi''^*(x)\psi(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(-\psi'^*(x)\psi(x) + \psi'(x)\psi^*(x)) = 0$$

integriert:

$$-\psi'^*(x)\psi(x) + \psi'(x)\psi^*(x) = C$$

Wie vorhin muss im Unendlichen die Funktion und deren Ableigungen veschwinden (Normierbarkeit!)

$$\lim_{x\to\infty}(-\psi'^*(x)\psi(x)+\psi'(x)\psi^*(x))=0$$

Dass wird erfüllt, wenn gilt:

$$(-\psi'^*(x)\psi(x)+\psi'(x)\psi^*(x))=0$$

Logarithmische Ableitung:

$$\frac{d}{dx}ln(\psi(x))=\frac{d}{dx}ln(\psi^*(x))$$

Die Gleichung integrieren:

$$ln(\psi(x))=ln(\psi^*(x))+D$$

und damit:

$$\psi(x)=\psi^*(x)\cdot e^D$$

(c) Wahrscheinlichkeitsstromdichte und Erwartungswert des Impulses:

Wahrscheinlichkeitsstromdichte:

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte beschreibt zu jedem Zustand wie sich die Wahrscheinlichkeit im Raum ausbreitet.

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte lautet:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi \ \vec{\nabla} \ \psi^* - \psi^* \ \vec{\nabla} \ \psi\right]$$

Wenn gilt:

$$\psi(x) = \psi^*(x)$$

dann wird die Wahrscheinlichkeitsstromdichte Null.

Die Zustände sind gebunden (und dadurch stationär). Mit der Zeit ändert sich die Wahrscheinlichkeitsstromdichte nicht. Anders ist das z.B. bei einem Streuproblem.

Erwartungswert des Impulses:

Der Erwartungswert des Impulses berechnet sich folgendermaszen:

$$< p >= \int \ \psi^* \ (-i\hbar\partial_x) \ \psi \ dx = -i\hbar \int \psi^* \psi' dx = -i\hbar \int \psi\psi' dx$$

$< p >$ muss eine Reelle Zahl sein und vor dem Integral steht ein i. Deswegen ist der Erwartungswert des Impulses Null!

Ein gebundener Zustand ist ein stationärer Zustand. Er kann keinen Impuls übertragen.

3. (a) **Fourier-Transformierte(FT):**
Die FT berechnet sich mit:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Die Wellenfunktion im Spalt:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{ik_0 x_0}$$

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int f(y)\, e^{-iky} dy =$$

mit

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{ik_0 x_0}$$

Die FT lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi d}}\, e^{ik_0 x_0} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-iky} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}}\, e^{ik_0 x_0} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-iky} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi d}}\, e^{ik_0 x_0} \Big(\frac{e^{-iky}}{ik}\Big)\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{e^{ik_0 x_0}}{ik} \Big[e^{ik\frac{d}{2}} - e^{-ik\frac{d}{2}} \Big] = \frac{2}{k\sqrt{2\pi d}}\, e^{ik_0 x_0} sin(k\frac{d}{2})$$

Die FT lautet:

$$\psi(x_0, k) = \frac{2}{k\sqrt{2\pi d}}\, e^{ik_0 x_0} sin(k\frac{d}{2})$$

Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet:

$$\sigma_y \cdot \sigma_{py} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ortsunschärfe wird abgeschätzt mit d - hier kann sich das Teilchen "maximal" im Spalt befinden.
Also $\sigma_y = d$
Für σ_{py} haben wir von der Angabe den Hinweis:
Die erste Nullstelle hat der Sinus bei Null:

$$0 = k\frac{d}{2}$$

und die erste Nullstelle bei:

$$k\frac{d}{2} = \pi \quad \longrightarrow \quad k = \frac{2\pi}{d}$$

und mit $p = \hbar k$ wird daraus:

$$\sigma_{py} = \frac{2\pi}{d}\hbar$$

und die Unschärferelation lautet nun:

$$d \cdot \frac{2\pi}{d}\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$2\pi\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

was erfüllt ist!

(b) Die Fouriertransformierte:

$$F(k_y) = \frac{2}{k\sqrt{2\pi d}}\, sin(k_y \frac{d}{2})\, e^{ik_0x_0} = \frac{de^{ik_0x_0}}{\sqrt{2\pi d}}\frac{sin(\frac{k_yd}{2})}{\frac{k_yd}{2}} = \sqrt{\frac{d}{2\pi}}\,\frac{sin(\frac{k_yd}{2})}{\frac{k_yd}{2}}e^{ik_0x_0}$$

Die Intensität ist:

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x) = F(k)F^*(k) = \frac{d}{2\pi}\frac{sin^2(\frac{k_yd}{2})}{(\frac{k_yd}{2})^2}$$

Aus den Strahlensatz folgt(siehe Skizze):

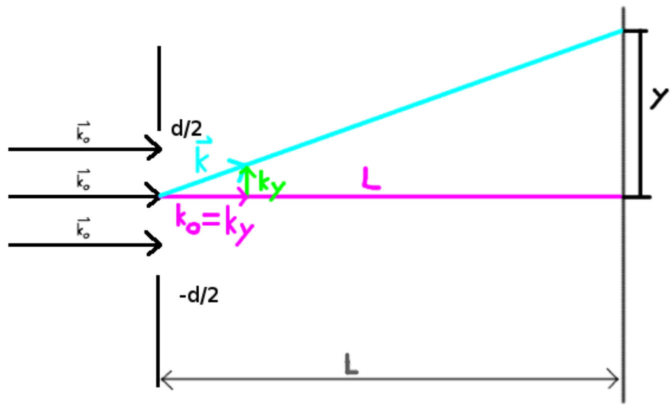


Abbildung 9: Skizze

$$\frac{k_0}{k_y} = \frac{L}{y}$$

und damit:

$$k_y = \frac{y}{L}k_0 \quad \text{und} \quad dk_y = \frac{k_0}{L}d_y$$

einsetzen:

$$F(k_y) = \frac{d}{2\pi}\,\frac{sin^2(\frac{y}{L}\;k_0\;d)}{(\frac{d}{2}\frac{y}{L}k_0)^2}$$

Die Wahrscheinlichkeit Teilchen in einem Intervall $[x + dx]$ zu finden ist definiert als:

$$|\psi(x)|^2 dx = W(x, x + dx)$$

bzw.

$$|F(k)|^2 dk = W(k, k + dk)$$

Wobei $F(k)$ die Funktion im k-Raum ist.

$$|F(\frac{k_0 y}{L})|^2 dk = \frac{d}{2\pi}\,\frac{sin^2(\frac{k_yd}{2})}{(\frac{k_yd}{2})^2}\,\frac{k_0}{L}dy$$

(c) Hygensche Prinzip:
An jedem Auftreffpunkt der ebenen Welle entsteht eine Kugelwelle:

$$Kugelwelle : F(y) = \frac{1}{|\vec{r}|} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Die Integration über den Spalt erstreckt sich über:

$$-\frac{d}{2} \leq y' \leq \frac{d}{2}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{L^2 + (y - y')^2} \approx \sqrt{L^2} \approx L$$

L ist der Abstand zum Schirm und $L >> y$
Damit wird das Integral zu:

$$F(y) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i\vec{k}(y-y')} dy' =$$

$$= \frac{1}{L} e^{iky} \left[\frac{e^{iky'}}{-ik} \right] \Bigg|_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{L} e^{iky} \left[\frac{e^{\frac{-ikd}{2}} - e^{\frac{ikd}{2}}}{ik} \right] = \frac{d}{L} e^{iky} \cdot \frac{sin(\frac{kd}{2})}{\frac{kd}{2}}$$

$$\implies P(y) = |F(y)|^2 = \frac{d^2}{L^2} \cdot \left[\frac{sin(\frac{kd}{2})}{\frac{kd}{2}} \right]^2$$

4.

$$\text{Einfallende Welle: } \Psi_i(\vec{x},t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\text{Reflektierte Welle: } \Psi_r(\vec{x},t) = Be^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\text{Transmittierte Welle: } \Psi_t(\vec{x},t) = Ce^{i(\vec{q}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Die Wellenvektoren:

$$\vec{k} = k(\vec{e}_x\ cos\ \theta + \vec{e}_y\ sin\ \theta)$$
$$\vec{k}' = k'(-\vec{e}_x\ cos\ \theta' + \vec{e}_y\ sin\ \theta')$$
$$\vec{q}' = q(\vec{e}_x\ cos\ \theta'' + \vec{e}_y\ sin\ \theta'')$$

(a) Bei $x = 0$ gilt (Stetigkeit bei x=0):

$$\Psi_i(\vec{0},t) + \Psi_r(\vec{0},t) = \Psi_t(\vec{0},t) \quad \longrightarrow \quad A + B = C$$

ebenso die Ableitungen müssen bei $x = 0$ stetig sein.

$$\partial_x\ \Psi_i(\vec{x},t) = A\ e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot sin(\theta)\cdot y} \cdot e^{i\cdot k\cdot cos(\theta)x} \cdot (i\cdot k\cdot cos(\theta))$$
$$\partial_x\ \Psi_r(\vec{x},t) = B\ e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{-i\cdot k'\cdot cos(\theta')\cdot x} \cdot e^{i\cdot k'\cdot sin(\theta')y} \cdot (-i\cdot k'\cdot cos(\theta'))$$
$$\partial_x\ \Psi_t(\vec{x},t) = C\ e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot q\cdot sin(\theta'')\cdot y} \cdot e^{i\cdot q\cdot cos(\theta'')x} \cdot (i\cdot q\cdot cos(\theta''))$$

$$\partial_y\ \Psi_i(\vec{x},t) = A\ e^{i\cdot k\cdot cos(\theta)\cdot x} \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot sin(\theta)y} \cdot (i\cdot k\cdot sin(\theta))$$
$$\partial_y\ \Psi_r(\vec{x},t) = B\ e^{-i\cdot k'\cdot cos(\theta')\cdot x} \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k'\cdot sin(\theta')y} \cdot (i\cdot k\cdot sin(\theta))$$
$$\partial_y\ \Psi_t(\vec{x},t) = C\ e^{i\cdot q\cdot cos(\theta'')\cdot x} \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot q\cdot sin(\theta'')y} \cdot (i\cdot q\cdot sin(\theta''))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_i(\vec{0},t) + \Psi_r(\vec{0},t)) = \frac{\partial}{\partial y}(\Psi(\vec{0},t)$$

$$A\ e^{i\omega t}\ (i\cdot k\cdot sin(\theta)) + B\ e^{i\omega t}\ (i\cdot k'\cdot sin(\theta')) = C\ e^{i\cdot\omega\cdot t}\ (i\cdot q\cdot sin(\theta'')$$

$$(A + B)\cdot(i\cdot k\cdot sin(\theta)) = C\cdot(i\cdot q\cdot sin(\theta)$$

mit $A + B = C$ folgt:

$$C\cdot i\cdot k\cdot sin(\theta) = C\cdot i\cdot q\cdot sin(\theta'')$$

$$\Longrightarrow \frac{sin(\theta'')}{sin(\theta)} = \frac{k}{q} = n$$

Das gilt $k = k'$ sieht kann man leicht zeigen:
Die Welle erfährt in y-Richtung keinen Potentialsprung. Darausfolgt, dass sich k nicht ändert (z.B. indem man die SGL in den Bereichen $y < 0$ und $y > 0$ löst.
In der Grenzfläche bei $x = 0$ trifft die Welle auf einen Potentialwall und wird reflektiert. Aus der Überlagerung folgt, dass gilt: $\theta = \theta'$

Erhaltung des Winkels:
es gilt: $p = \hbar\cdot k$
Impulserhaltung nur in x-Richtung:

$$\hbar \cdot k \cdot cos(\theta) - \hbar \cdot k' \cdot cos(\theta') = \hbar \cdot q \cdot cos(\theta'')$$

Impulserhaltung nur in y-Richtung:

$$\hbar \cdot k \cdot sin(\theta) + \hbar \cdot k' \cdot sin(\theta') = \hbar \cdot q \cdot sin(\theta'')$$

Diese Gleichungen müssen auch im Grenzfall (=Totalreflexion = q = 0) erfüllt sein:

$$k \cdot cos(\theta) - k' \cdot cos(\theta') = 0$$

und

$$k \cdot sin(\theta) + k' \cdot sin(\theta') = 0$$

Daraus folgt:

$$k \cdot cos(\theta) = k' \cdot cos(\theta')$$

und

$$k \cdot sin(\theta) = -k' \cdot sin(\theta')$$

$k = k'$ ist schon bekannt, und Cosinus ist eine gerade Funktion, Sinus eine ungerade. Damit ist die obige Gleichung erfüllt.

(b) Die Koeffizientenverhältnisse $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$:

Stetigkeit bei x=0 von $\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_i(\vec{0},t)) + \frac{\partial}{\partial x}(\Psi_r(\vec{0},t)) = \frac{\partial}{\partial x}(\Psi_t(\vec{0},t))$$

$$A \cdot e^{-i\cdot\omega t} \cdot (i \cdot k \cdot cos(\theta)) + B \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot (-i \cdot k' \cdot cos(\theta')) = C \cdot e^{-i\cdot\omega t} \cdot (i \cdot q \cdot cos(\theta''))$$

$$A \cdot k \cdot cos(\theta) - B \cdot k' \cdot cos(\theta') = C \cdot q \cdot cos(\theta'') = A \cdot q \cdot cos(\theta'') + B \cdot q \cdot cos(\theta'')$$

$$A(k \cdot cos(\theta) - q \cdot cos(\theta'')) = B \cdot (q \cdot cos(\theta'' + k' \cdot cos(\theta'))$$

$$\implies \frac{A}{B} = \frac{q \cdot cos(\theta'') + k' \cdot cos(\theta')}{k \cdot cos(\theta) - q \cdot cos(\theta'')} \overset{k=k',\,\theta=\theta'}{=\longrightarrow} = \frac{q \cdot cos(\theta'') + k \cdot cos(\theta)}{k \cdot cos(\theta) - q \cdot cos(\theta'')}$$

einsetzen von $\frac{sin(\theta'')}{sin(\theta)} = \frac{k}{q} \implies k = \frac{sin(\theta'')}{sin(\theta)} \cdot q$ gibt:

$$\frac{A}{B} = \frac{q \cdot cos(\theta'') + k \cdot cos(\theta)}{k \cdot cos(\theta) - q \cdot cos(\theta'')} = \frac{q \cdot cos(\theta'') + \frac{sin(\theta'')}{tan(\theta)} \cdot q}{q\frac{sin(\theta'')}{tan(\theta)} - q cos(\theta'')} = \frac{cos(\theta'') + \frac{sin(\theta'')}{tan(\theta)}}{\frac{sin(\theta'')}{tan(\theta)} - cos(\theta'')} =$$

$$= \frac{\left(\frac{cos(\theta'')\cdot tan(\theta)+sin(\theta'')}{tan(\theta)}\right)}{\left(\frac{sin(\theta'')-cos(\theta'')\cdot tan(\theta)}{tan(\theta)}\right)} = \frac{cos(\theta'') \cdot tan(\theta) + sin(\theta'')}{sin(\theta'') - cos(\theta'') \cdot tan(\theta)} =$$

$$= \frac{tan(\theta) + \frac{sin(\theta'')}{cos(\theta'')}}{\frac{sin(\theta'')}{cos(\theta'')} - tan(\theta)} = \frac{tan(\theta) + tan(\theta'')}{tan(\theta'') - tan(\theta)}$$

für $\frac{C}{A}$:

$$A \cdot i \cdot k \cdot cos(\theta) - B \cdot i \cdot k' \cdot cos(\theta') = C \cdot i \cdot q \cdot cos(\theta'')$$

mit $B = C - A \longrightarrow -B = -C + A$ folgt:

$$A \cdot (k \cdot cos(\theta) + k' \cdot cos(\theta')) = C \cdot (q \cdot cos(\theta'') + k' \cdot cos(\theta'))$$

$$\frac{C}{A} = \frac{k \cdot cos(\theta) + k' \cdot cos(\theta')}{q \cdot cos(\theta'') + k' \cdot cos(\theta')}$$

$k = k'$ und $\theta = \theta'$:

$$\frac{C}{A} = \frac{2 \cdot k \cdot cos(\theta)}{q \cdot cos(\theta'') + k \cdot cos(\theta)} =$$

wieder $k = \frac{sin(\theta'')}{sin(\theta)} q$ eingesetzt:

$$\frac{C}{A} = \frac{2 \cdot q \cdot sin(\theta'') \cdot \frac{1}{tan(\theta)}}{q \cdot cos(\theta'') + q \cdot sin(\theta'') \cdot \frac{1}{tan(\theta)}} == \frac{sin(\theta'') \cdot \frac{2}{tan(\theta)}}{sin(\theta'') \cdot \frac{cos(\theta'')}{\sin(\theta'')} + \frac{1}{tan(\theta)}} = \frac{2}{tan(\theta)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{tan(\theta'')} + \frac{1}{tan(\theta)}} =$$

$$= \frac{2}{tan(\theta)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{tan(\theta)+tan(\theta'')}{tan(\theta'') \cdot tan(\theta)}\right)} = \frac{2}{tan(\theta)} \cdot \frac{tan(\theta'') \cdot tan(\theta)}{tan(\theta) + tab(\theta'')} = \frac{2 \cdot tan(\theta'')}{tan(\theta) + tan(\theta'')}$$

(c) Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte wird berechnet mit:

$$\vec{j} = Re\Big(\phi^* \ \frac{\hbar}{im} \ \vec{\nabla}\phi\Big) \text{ wobei “Re” der Realteil ist}$$

$$\Phi_i(\vec{x}, t) = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = A \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$$

mit

$$\vec{k} = k \cdot (\vec{e_x} \cdot cos(\theta) + \vec{e_y} \cdot sin(\theta))$$

$$\vec{j} = Re(\phi^* \ \frac{\hbar}{i \ m} \vec{\nabla} \ \phi) = \frac{\hbar}{m} \cdot Re(\phi^* \ \frac{1}{i} \ \vec{\nabla} \ \phi) =$$

$$\phi^* = A \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-i \ k \cdot (\vec{e_x} cos(\theta) + \vec{e_y} sin(\theta))}$$

$$\frac{1}{i} \ \vec{\nabla} \ \phi = \frac{1}{i} \cdot (e^{i \cdot k \cdot (e_x \cdot cos(\theta) \vec{+} e_y \cdot s\vec{i}n(\theta))} \cdot A \cdot i \cdot k \cdot (cos(\theta) \ \vec{e_x} + sin(\theta) \ \vec{e_y}) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$$

Die e-Funktionen fallen weg. Übrig bleibt:

$$\frac{\hbar}{m} A^2 \cdot k(cos(\theta) \cdot \vec{e_x} + sin(\theta) \cdot \vec{e_y})$$

Analog für die anderen Wahrscheinlichkeitsstromdichten:

$$\vec{j_i} = |A|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot k}{m} \cdot \Big(cos(\theta) \cdot \vec{e_x} + sin(\theta) \cdot \vec{e_y}\Big)$$

$$\vec{j_r} = |B|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot k'}{m} \cdot \Big(cos(\theta') \cdot \vec{e_x} + sin(\theta') \cdot \vec{e_y}\Big)$$

$$\vec{j_t} = |C|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot q}{m} \cdot \Big(cos(\theta'') \cdot \vec{e_x} + sin(\theta'') \cdot \vec{e_y}\Big)$$

(d) **Transmissionskoeffizient:**

$$T = \left|\frac{\vec{j}_{tx}}{\vec{j}_{ix}}\right| = \left|\frac{|C|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot q}{m} \cdot cos(\theta'') \cdot \vec{e_x}}{|A|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot k}{m} \cdot cos(\theta) \cdot \vec{e_x}}\right| = \left(\frac{q}{k} \cdot \frac{|C|^2}{|A|^2} \cdot \frac{cos(\theta'')}{cos(\theta)}\right) =$$

Snellius einsetzen:

$$= \frac{sin(\theta)}{sin(\theta'')} \cdot \frac{cos(\theta'')}{cos(\theta)} \cdot \frac{\big(2 \cdot tan(\theta'')\big)^2}{\big(tan(\theta) + tan(\theta'')\big)^2} = \frac{tan(\theta)}{tan(\theta'')} \cdot \frac{4 \cdot tan(\theta'')}{(tan(\theta) + tan(\theta''))^2} =$$

$$= \frac{tan(\theta) \cdot 4 \cdot tan(\theta'')}{\big(tan(\theta) + tan(\theta'')\big)^2}$$

Reflexionskoeffizient:

$$R = \Big|\frac{\vec{j}_{rx}}{\vec{j}_{ix}}\Big| = \Big|\frac{|B|^2}{|A|^2} \cdot \frac{k'}{k} \cdot \frac{-cos(\theta)}{cos(\theta)}\Big|$$

$\theta = \theta'$ und $k = k'$ damit folgt:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \Big(\frac{tan(\theta'') - tan(\theta)}{tan(\theta) + tan(\theta'')}\Big)^2$$

$$T + R = \frac{(tan(\theta'') - tan(\theta))^2}{(tan(\theta) + tan(\theta''))^2} + \frac{tan(\theta) \cdot 4 \cdot tan(\theta'')}{\big(tan(\theta) + tan(\theta'')\big)^2} =$$

$$= \frac{tan^2(\theta'') - 2 \cdot tan(\theta'') \cdot tan(\theta) + tan^2(\theta) + 4 \cdot tan(\theta) \cdot tan(\theta'')}{tan^2(\theta) + 2 \cdot tan(\theta) \cdot tan(\theta'') + tan^2(\theta'')} =$$

$$= \frac{tan^2(\theta'') + tan^2(\theta) + 2 \cdot tan(\theta'') \cdot tan(\theta)}{tan^2(\theta'') + tan^2(\theta) + 2 \cdot tan(\theta'') \cdot tan(\theta)} = 1$$