4. Tutorium - Quantentheorie I - 16.11.2012 - Lösung

1. Beweisen Sie unter Verwendung der formalen Operatorgleichung

$$[A, B_1 B_2] = [A, B_1] B_2 + B_1 [A, B_2]$$

die Beziehung

$$[A, B^n] = \sum_{\nu=1}^{n} B^{\nu-1} [A, B] B^{n-\nu} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

Was ergibt sich daraus für die Kommutatoren $[X, P^n], [X^m, P^n]$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, wenn $[X, P] = i\hbar\mathbb{1}$ gilt?

2. Gegeben sei ein zweidimensionaler komplexer Hilbertraum, für den eine Basis durch zwei orthonormierte Vektoren $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ gegeben ist (Basis der $\{a\}$-Darstellung. Eine weitere Basis des Hilbertraums sei durch folgende Vektoren,

$$|b_1\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,|a_1\rangle - i\,|a_2\rangle\right), \qquad |b_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|a_1\rangle + i\sqrt{3}\,|a_2\rangle\right)$$

definiert (Basis der $\{b\}$-Darstellung)

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis bilden.

b) Welche Matrizen sind den Ketvektoren $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |b_1\rangle, |b_2\rangle$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

c) Welche Matrizen sind den Bravektoren $\langle b_1|, \langle b_2|$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

d) Berechnen Sie die inneren Produkte $\langle b_1|b_1\rangle, \langle b_1|b_2\rangle, \langle b_2|b_2\rangle$ in der $\{a\}$-Darstellung.

e) Drücken Sie den unitären Operator $\hat{U}$, der den Basiswechsel $|b_i\rangle = \hat{U}\,|a_i\rangle$ vermittelt durch die Vektoren $|a_i\rangle, |b_j\rangle$ aus. Welche Matrix ist diesem Operator $\hat{U}$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

f) Betrachten Sie den Operator $S = |a_1\rangle\langle a_2| + |a_2\rangle\langle a_1|$.
(i) geben Sie die dem Operator S in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnete Matrix an. (ii) Berechnen Sie die Spektraldarstellung von S.

3. Betrachten Sie einen unendlich tiefen Potentialtopf im Bereich $x = [0, L]$. Die Energieeigenfunktionen $|n\rangle$, welche die stationäre Schrödingergleichung

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$$

erfüllt, seien in Ortsdarstellung gegeben durch,

$$\langle x|n\rangle = \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,sin(k_n x) \quad mit \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in bra-ket Formalismus an.
Hinweis: Verwenden Sie dafür seine Spektraldarstellung

b) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte des Ortes x und des Impulses p für die n-te Eigenfunktion: $\langle n|\,x\,|n\rangle$, $\langle n|\,x^2\,|n\rangle$, $\langle n|\,p\,|n\rangle$, $\langle n|\,p^2\,|n\rangle$.

c) Ermitteln Sie das Unschärfeprodukt $\Delta x \cdot \Delta p$ für die n-te Eigenfunktion und überprüfen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.

d) Wie Sie bereits wissen, ist die Energie für die stationären Zustände $\phi_n(x)$ genau(scharf) definiert ($\Delta E = 0$). Nachdem die Energie im unendlich tiefen Potentialtopf rein kinetisch ist, könnte man argumentieren, dass somit auch der Impuls scharf definiert sein muss ($\Delta p = 0$). Wieso ist dieses Argument offenbar falsch?

e) Nehmen Sie an, dass Sie viele identische Potentialtöpfe vor sich haben in denen das Teilchen immer im Zustand $\phi_n(x)$ präpariert ist (n ist gleich für alle Potentialtöpfe). An jedem einzelnen der Potentialtöpfe werde nun jeweils eine Ortsmessung durchgeführt. Welche Messergebnisse erhalten Sie bei Ihren Messungen (i) im Mittel bzw. (ii) am häufigsten?

Zu Kreuzen: 1, 2a-d, 2ef, 3

1.

$$[A,\, B^n] = [A,\, B^{n-1}B] = [A,\, B^{n-1}]\, B + B^{n-1}\, [A,\, B] =$$

$$= \Big([A,\, B^{n-2}] B + B^{n-2}\, [A,\, B] \Big)\, B + B^{n-1}\, [A,\, B] =$$

$$= [A,\, B^{n-2}]\, B^2 + B^{n-2} [A,\, B]\, B + B^{n-1} [A,\, B] =$$

$$= \underbrace{[A,\, B]\, B^{n-1}}_{\nu=1} + \underbrace{B\, [A,\, B]\, B^{n-2}}_{\nu=2} + \ldots + \underbrace{B^{n-2}\, [A,\, B]\, B}_{\nu=n-1} + \underbrace{B^{n-1}\, [A,\, B]}_{\nu=n}$$

$$\left([A,\, B^{n-2}] = [A,\, B^n B^{-2}] = [A,\, B^n]\, B^{-2} + B^n\, [A,\, B^{-2}] \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} B^{\nu-1}\, [A,\, B]\, B^{n-\nu}$$

$$[X,\, P^n] = \sum_{\nu=1}^{n} P^{\nu-1}\, [X,\, P]\, P^{n-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} i\hbar \underbrace{P^{\nu-1} P^{n-\nu}}_{P^{\nu-1-\nu+n} = P^{n-1}} = i\hbar P^{n-1} \cdot n$$

$$\left(\sum_{k=n}^{m} x = (m-n+1)x \right)$$

$$[X^m,\, P^n] = -[P^n,\, X^m] = -\sum_{\nu=1}^{m} X^{\nu-1} \underbrace{[P^n,\, X]}_{-[X,\, P^n]} X^{m-\nu} = \sum_{\nu=1}^{m} X^{\nu-1}\, i\hbar\, P^{n-1}\, X^{m-\nu} \cdot n$$

2. a)

$$\text{Basis}: \langle b_1|b_1\rangle = \langle b_2|b_2\rangle = 1 \qquad \text{und } \langle b_1|b_2\rangle = \langle b_2|b_1\rangle = 0$$

z.B.: $\langle b_1|b_1\rangle =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\langle a_1| + i\,\langle a_2|\Big)}_{=|b_1\rangle^\dagger = \langle b_1|} \cdot \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,|a_1\rangle - i\,|a_2\rangle\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\Big(3\underbrace{\langle a_1|a_1\rangle}_{=1} - i\sqrt{3}\underbrace{\langle a_1|a_2\rangle}_{=0} + i\sqrt{3}\underbrace{\langle a_2|a_1\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle a_2|a_2\rangle}_{=1}\Big) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

z.B.: $\langle b_2|b_1\rangle =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\langle a_1| - i\sqrt{3}\,\langle a_2|\Big)}_{=|b_2\rangle^\dagger = \langle b_2|} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,|a_1\rangle - i\,|a_2\rangle\Big)}_{=|b_1\rangle} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\Big(\sqrt{3}\underbrace{\langle a_1|a_1\rangle}_{=1} - i\underbrace{\langle a_1|a_2\rangle}_{=0} - 3i\underbrace{\langle a_2|a_1\rangle}_{=0} - \sqrt{3}\underbrace{\langle a_2|a_2\rangle}_{=1}\Big) = 0$$

b)

c)

$$\langle b_1| = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\langle a_1| + i\,\langle a_2|\Big)$$

Darstellung bez. $\{a\}$: $\quad |\psi\rangle = x\,|a_1\rangle + y\,|a_2\rangle \quad$ und $\quad \langle\psi| = \bar{x}\,\langle a_1| + \bar{y}\,\langle a_2|$

Koordinaten v. $\langle\psi|$ gleich Koeffizienten v. $\langle a_1|, \langle a_2|$

$$\langle b_1|^{\{a\}} = \Big(|b_1\rangle^{\{a\}}\Big)^* = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{i}{2}\right)$$

$$\langle b_2|^{\{a\}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

d)

$$\big(\vec{x},\vec{y}\big) = \sum_i \bar{x}_i\, y_i$$

$$\langle x| = \big(|x\rangle\big)^T$$

$$\langle b_1^{\{a\}}|b_1^{\{a\}}\rangle = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -i/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ i/2\end{pmatrix} = \frac{3}{4} + \Big(\frac{-i}{2}\Big)\Big(\frac{i}{2}\Big) = \frac{3}{4} - \frac{i^2}{4} = 1$$

$$\langle b_1^{\{a\}}|b_2^{\{a\}}\rangle = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ i/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{1}/2\\ (i\sqrt{3})/2\end{pmatrix} = \ldots = 0$$

$$\langle b_2^{\{a\}}|b_2^{\{a\}}\rangle = 1$$

e) Basiswechsel durch unitäre Matrix

$$|b_i\rangle = \hat{U}\,|a_i\rangle$$

$$\hat{U} = \underbrace{\sum_i |a_i\rangle\langle a_i|}_{=\mathbb{1}}\ \hat{U}\ \underbrace{\sum_j |b_j\rangle\langle b_j|}_{=\mathbb{1}} = \sum_{ij} \underbrace{\langle a_i|\,\hat{U}\,|b_j\rangle}_{=U_{ij}} |a_i\rangle\langle b_j| = \sum_{ij} U_{ij}\,|a_i\rangle\langle b_j|$$

$\longrightarrow$ in $\{a\}$ – Darstellung:

$$\hat{U} = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\ \hat{U}\ \sum_j |a_j\rangle\langle a_j| = \ldots = \sum_{ij} U_{ij}\ \ |a_i\rangle\langle a_i|$$

f)

$$\hat{S} = |a_1\rangle\langle a_2| + |a_2\rangle\langle a_1|$$

(i) $\hat{S}$ in $\{a\}$ – Darstellung : Matrix

$$\hat{S} = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\ \hat{S}\ \sum_j |a_j\rangle\langle a_j| = \sum_{ij} |a_i\rangle\langle a_i| \qquad \text{mit} \qquad S_{ij} = \langle a_i|\,\hat{S}\,|a_j\rangle$$

$$S_{11} = \langle a_1|\,\hat{S}\,|a_1\rangle = \underbrace{\langle a_1|a_1\rangle}_{=1}\underbrace{\langle a_2|a_1\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle a_1|a_2\rangle}_{=0}\underbrace{\langle a_1|a_1\rangle}_{=1} = 0$$

$$S_{22} = 0 \qquad S_{12} = 1 \qquad S_{21} = 1$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spektraldarstellung allg:

$$\hat{A} = \sum_i f_i\ \ |f_i\rangle\langle f_i|$$

$$\text{Eigenwert:}\underbrace{\lambda = -1}_{=f_1} \quad \rightarrow \quad EV = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\,|f_1\rangle}$$

$$\text{Eigenwert:}\underbrace{\lambda = 1}_{=f_2} \quad \rightarrow \quad EV = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\,|f_2\rangle}$$

$$\hat{S} = \sum_i f_i\ \ |f_i\rangle\langle f_i| = \underbrace{(-1)}_{f_1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{|f_1\rangle}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\langle f_1|} + \underbrace{1}_{f_2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{|f_2\rangle}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\langle f_2|} =$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}$$

3. a unendlich tiefer Pot.topf: $x \in [0, L]$

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\textbf{Ortsdarstellung:}\ \langle x|n\rangle = \sqrt{\frac{2}{n}}\, sin(k_n x) \qquad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\hat{H} = \sum_n |n\rangle\, E_n\, \langle n|$$

b

$$\langle n|\,\hat{x}\,|n\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L sin(k_n x)\ x\ sin(k_n x)\ dx = \frac{L}{2}$$

$$\langle n|\,\hat{x}^2\,|n\rangle = \frac{2}{L}\int sin^2(k_n x)\ x^2\ dx = \frac{L^3}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

$$\langle n|\,\hat{p}\,|n\rangle = \frac{2}{L}\int sin(k_n x)\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\ sin(k_n x)\ dx = 0 \qquad \text{kann nicht komplex sein)}$$

$$\langle n|\,\hat{p}^2\,|n\rangle = \hbar^2 k_n^2$$

c

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \frac{L}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{6}{n^2\pi^2}}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \hbar k_n$$

$$\longrightarrow \Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{n^2\pi^2 - 6}{3}}$$