1. Tutorium - Quantentheorie I - 12.10.2012

1. Gegeben sei ein Teilchen, welches durch die Wellenfunktion ($b > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$)

   $$\Psi(x) = A * e^{-b|x|} \sin(x) e^{i\phi x}$$

   beschrieben wird.

   a) Bestimmen Sie A so, dass die Wellenfunktion $\Psi(x)$ normiert ist.

   b) Wie wahrscheinlich ist es, das Teilchen im Intervall $[-\pi, \pi]$ anzutreffen?

2. Gegeben sei ein eindimensionaler Stab der Länge L, dessen Temperatur T als Funktion des Ortes $x \in [0, L]$ und der Zeit $t \in (0, \infty)$ untersucht werden soll. Lösen Sie dazu die Wärmeleitungsgleichung

   $$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \,,$$

   wobei κ der Temperatur-Leitwert ist (dieser bestimmt die Zeit, die zum Temperaturausgleich benötigt wird). Verwenden Sie zur Lösung obiger Differentialgleichung folgende Randbedingungen:

   $$T(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \,,$$

   für alle Zeiten $t > 0$.

   a) Vergleichen Sie obige Wärmeleitungsgleichung mit der Schrödinger-Gleichung bzw. der Wellengleichung und diskutieren Sie die Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten in der Struktur dieser Gleichungen.

   b) Lösen Sie das Randwertproblem mittels Separation. Welche physikalische Bedeutung haben die Randbedingungen?

   c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der ganze Stab auf konstanter Temperatur $T = 1$. Passen Sie die aus Punkt (b) hervorgehende Lösung an diesen Anfangswert an.

d) Diskutieren Sie, wie das Verhalten von $T(x,t)$ vom Temperatur-Leitwert κ abhängt und stellen Sie den Verlauf von $T(x,t)$ mit Hilfe des Computers graphisch dar. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A hermitesch (=selbstadjungiert)? Ist A unitär? Welche Eigenschaften erfüllen Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen bzw. einer unitären Matrix?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die normierten Eigenvektoren von A.

c) Zeigen Sie explizit, dass die Eigenvektoren eine vollständige und orthogonale Basis bilden.

Zu kreuzen: 1,2ab,2cd,3