

# 10. Tutorium - Quantentheorie I - 18.01.2013

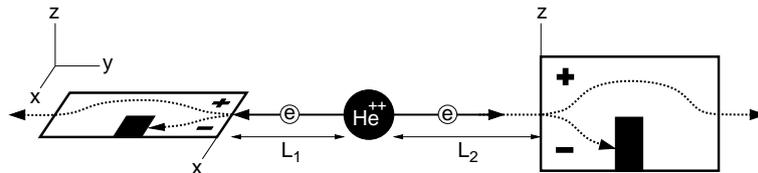
1. Ein Elektronenspin ( $s = \frac{1}{2}$ ) befinde sich in einem Zustand zur Drehimpulsquantenzahl  $l = 0$  oder  $l = 1$ . Drücken Sie alle Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses  $|j, m_j\rangle$ , die für diese beiden Fälle ( $l = 0, l = 1$ ) möglich sind, in der Produktbasis  $|l, m_l\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_s\rangle$  aus. Verwenden Sie dazu eine Clebsch-Gordan-Tabelle (sh. Skriptum oder „Links“ auf quanten.at). Betrachten Sie nun den Zustand  $|j = 3/2, m_j = 1/2\rangle$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn Sie in diesem Zustand eine Messung von  $L_z$  durchführen, dafür den Messwert  $\hbar$  zu erhalten? Wie groß sind der Erwartungswert und die Unschärfe von  $S_z$  in diesem Zustand?
2. Der Hamiltonoperator eines Systems mit zwei (unterscheidbaren) Spins  $s = 1/2$  ist durch

$$\hat{H} = \frac{\alpha}{\hbar} (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + \frac{4\beta}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} \quad (1)$$

gegeben ( $\alpha, \beta > 0$ ;  $\vec{S}^{(i)}$ : Spinoperator zu Spin  $i$ ). Der erste Term in Gl. (1) beschreibt den Effekt eines externen Magnetfelds in  $z$ -Richtung und der zweite Term beschreibt eine anti-ferromagnetische Wechselwirkung zwischen den beiden Spins.

- a) Drücken Sie den Hamiltonoperator durch die Operatoren  $J_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)}$ ,  $J^2 = (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})^2$ ,  $(S^{(1)})^2$  und  $(S^{(2)})^2$  aus. Geben Sie alle möglichen Energieeigenwerte und die dazugehörigen Eigenzustände an. (Arbeiten Sie in der **gekoppelten** Basis  $|j, m_j\rangle$ .)
- b) Zeigen Sie nun anhand der Eigenzustände von  $\hat{H}$  dass das externe Magnetfeld für  $\alpha > 0$  (und  $\beta = 0$ ) beide Spins parallel zueinander ausrichtet und dass die anti-ferromagnetische Wechselwirkung für  $\beta > 0$  (und  $\alpha = 0$ ) zu einer anti-parallelen Ausrichtung der beiden Spins führt. Untersuchen Sie nun das Verhalten, wenn beide Terme wirken und somit  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Interpretieren Sie den Verlauf der Energieeigenwerte als Funktion von  $\alpha$  und  $\beta$  physikalisch. Für welches Verhältnis von  $\alpha$  und  $\beta$  tritt Entartung auf?
- c) Geben Sie alle auftretenden Energieeigenzustände in der **entkoppelten** Basis  $|m_1, m_2\rangle$  an. Nehmen Sie nun an, das System befinde sich im Zustand  $|m_1, m_2\rangle = |1/2, -1/2\rangle$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit können in diesem Fall die möglichen Energieeigenwerte gemessen werden?

3. Im Grundzustand des Heliumatoms befinden sich die beiden Elektronen in einem Singlett-Zustand mit Gesamtspin  $s = 0$ . Das Atom werde nun durch einen Laserpuls doppelt ionisiert, d.h. dass beide Elektronen durch die Energie des Laserpulses aus einem Bindungszustand in einen Kontinuumszustand gehoben werden und einen zweifach positiv geladenen Atomkern ( $\text{He}^{++}$ ) zurücklassen. Sie können nun annehmen, dass die beiden Elektronen nach dem Ionisierungsprozess weiterhin durch einen Singlett-Zustand beschrieben sind, selbst wenn sie nach der Emission in unterschiedliche Raumrichtungen eine große räumliche Distanz zueinander aufweisen.



- Verwenden Sie eine Clebsch-Gordan-Tabelle um zu zeigen, wie sich der Singlett-Zustand  $|s = 0, m_s = 0\rangle$  in der Produktbasis der beiden Elektronen  $|s_1, m_{s,1}\rangle$ ,  $|s_2, m_{s,2}\rangle$  anschreiben lässt. (Eine Clebsch-Gordan-Tabelle finden Sie im Skriptum oder unter „Links“ auf quanten.at.)
- Es werde nun zuerst an einem der beiden Elektronen der Wert  $\hbar/2$  für die Observable  $S_\alpha$  gemessen, wobei  $\alpha$  die Projektion des Spins auf die negative  $x$ -Richtung angibt (sh. obige Abbildung eines entsprechenden Stern-Gerlach-Apparats). Welches Ergebnis können Sie im Mittel für eine darauffolgende Messung (i) von  $S_z$  und (ii) von  $S_x$  am zweiten Elektron erwarten?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in beiden Stern-Gerlach-Filtern eine positive (+) Spin-Projektion zu messen, wenn die beiden Achsen der Spin-Filter einen relativen Winkel von  $\theta$  zueinander aufweisen (in obiger Abbildung  $\theta = \pi/2$ .) Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.

Zu kreuzen: 1,2a,2bc,3