3. Tutorium - Quantentheorie I - 09.11.2012

1. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, das durch zwei Delta-Funktionen gebunden wird:
$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x+a) - \frac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x-a), \quad D > 0,\, a > 0\,. \tag{1}$$
   a) Gehen Sie davon aus, dass durch die Symmetrie des Potentials $V(x)$ die gebundenen Wellenfunktionen gerade bzw. ungerade sein müssen. Bestimmen Sie die Bedingungen für die Existenz (i) der geraden und (ii) der ungeraden gebundenen Zustände. Verwenden Sie für die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion an den Stellen $x = \pm a$ jene aus den Ergebnissen von Bsp. 3 der vorigen Woche.
   b) Zeigen Sie durch graphisches Lösen der Eigenwertbedingungen aus a), dass es immer mindestens einen gebundenen Zustand gibt. Unter welchen Bedingungen gibt es (i) zwei oder (ii) mehr als zwei gebundene Zustände?
   c) Skizzieren Sie den Verlauf der gebundenen Zustände für verschiedene Werte von a und diskutieren Sie das Resultat physikalisch.
   d) Diskutieren Sie die Ergebnisse dieses Beispiels im Kontext von kovalenter Bindung eines zweiatomigen Moleküls. Motivieren Sie qualitativ auf Basis Ihrer Ergebnisse, warum ein molekularer Bindungszustand energetisch günstiger ist als der Zustand zweier ungebundener Atome.
   Hinweis: Berücksichtigen Sie qualitativ auch die elektrostatische Energie der beiden Kerne.

2. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $V(x)$.
   a) Es soll gezeigt werden, dass für beliebige Potentiale $V(x)$ die *gebundenen* (stationären) Zustände des Teilchens nicht entartet sein können: Zu jeder Eigenenergie E_n existiert nur genau ein einziger linear unabhängiger Eigenzustand $\phi_n(x)$ (sh. Definition von Entartung aus Bsp. 2 der vorigen Woche).

   Gehen Sie zu Beginn Ihrer Beweisführung davon aus, dass Sie zwei Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1$, $[\phi_n(x)]_2$ zum selben Eigenwert E_n besitzen:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,[\phi_n''(x)]_i + V(x)\,[\phi_n(x)]_i = E_n[\phi_n(x)]_i \quad \text{mit} \quad i = 1,\, 2\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Sie davon ausgehend zu folgender Beziehung gelangen können:

$$[\phi_n(x)]_2\,[\phi_n'(x)]_1 - [\phi_n(x)]_1\,[\phi_n'(x)]_2 = C\,. \tag{3}$$

Um den gesuchten Beweis zu erbringen, bestimmen Sie zuerst die Konstante C und zeigen Sie anhand von Gl. (3), dass die beiden Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1$, $[\phi_n(x)]_2$ voneinander linear abhängig sind.
Hinweis: Für einen gebundenen Zustand gilt, dass seine Wellenfunktion $\phi_n(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

b) Beweisen Sie, dass bei eindimensionalen Potentialen gebundene Wellenfunktionen immer reell gewählt werden können.
Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Punkt a) für Ihren Beweis.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte und den Erwartungswert des Impulses für die gebundenen Wellenfunktionen von oben. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

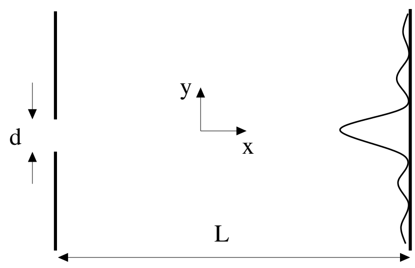

Abbildung 1: Experiment zur Beugung am Spalt.

3. Betrachten Sie den in der Abbildung 1 dargestellten Aufbau für die Beugung eines von links einfallenden Stroms von Teilchen an einem Spalt mit der Breite d. Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion der Teilchen direkt am Spalt ($x = x_0$) durch eine kastenförmige Welle beschrieben wird, die sich in Einfallsrichtung x wie eine ebene Welle mit Impuls $\hbar k_0$ bewegt,

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \exp(ik_0 x)/\sqrt{d} & -d/2 \leq y \leq d/2 \\ 0 & |y| \geq d/2 \end{cases} .$$

Die Teilchen werden auf einem Schirm gemessen, der sich in einem Abstand L vom Spalt befindet.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $\psi(x,y)$ im Spalt ($x = x_0$). Überprüfen Sie, ob die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort y und Impuls p_y erfüllt ist.
Hinweis: Schätzen Sie die Unschärfen σ_y, σ_{p_y} der Einfachheit halber mit dem Abstand zwischen den ersten beiden Nullstellen der jeweiligen Funktionen ab.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(y)$ ein Teilchen an der Position y des Schirms (bei festem $x = x_0 + L$) zu messen (unter der Annahme dass $L \gg d, y$ und dass zwischen Spalt und Schirm kein Potential auf das Teilchen wirkt). Verwenden Sie dabei, dass die Impulsverteilung der Teilchen in y-Richtung über die Fourier-Transformierte aus (a) bestimmt werden kann. Reproduzieren Sie damit das bekannte Resultat aus der Beugungstheorie,

$$P(y) = C \left[\frac{\sin(Ay)}{Ay}\right]^2 .$$

Bestimmten Sie die Konstanten A, C.

c) Erläutern Sie Ihr Ergebnis für $P(y)$ anhand des Huygensschen Prinzips (siehe dazu optische Beugung am Spalt).

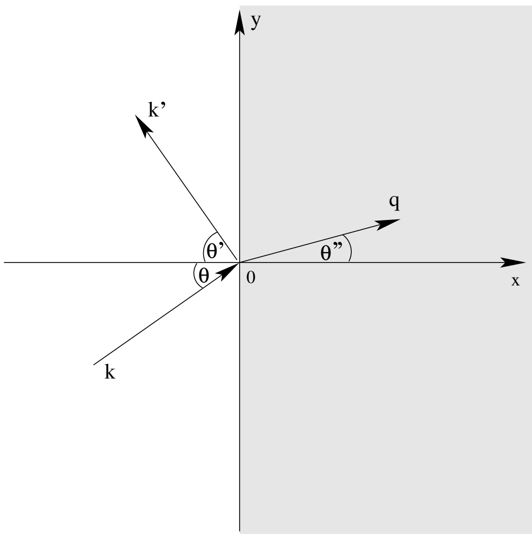

Abbildung 2: Lage der Wellenvektoren der einfallenden, reflektierten und transmittierten ebenen Wellen.

4. Betrachten Sie einen Teilchenstrom in zwei Dimensionen, der bei $x = 0$ auf eine Potentialstufe der Höhe V trifft (siehe Abbildung 2). Die Energie des Teilchenstroms ist $E > V$ und das Potential $V(x, y)$ ist entsprechend gegeben durch:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V, & x > 0 \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Der einfallende Teilchenstrom wird beschrieben durch eine ebene Welle der Form $\Psi_i(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$. Die reflektierten und transmittierten Wellenfunktionen sind

$$\Psi_r(\vec{x}, t) = Be^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)} \text{ und } \Psi_t(\vec{x}, t) = Ce^{i(\vec{q}\cdot\vec{x}-\omega t)}.$$

Die Wellenvektoren der einfallenden, reflektierten und transmittierten ebenen Wellen sind, wie in Abbildung 2 illustriert, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\vec{k} &= k(\vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_y \sin\theta), \\
\vec{k'} &= k'(-\vec{e}_x \cos\theta' + \vec{e}_y \sin\theta'), \\
\vec{q} &= q(\vec{e}_x \cos\theta'' + \vec{e}_y \sin\theta'').
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass der Einfallswinkel θ gleich dem Ausfallwinkel θ' ist. Zeigen Sie weiters die Gültigkeit des Snelliusschen Brechungsgesetzes $\frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = n$, wobei der Brechungsindex durch $n = \frac{k}{q}$ definiert ist.

b) Berechnen Sie die Koeffizientenverhältnisse $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$.

c) Berechnen Sie die einfallende, reflektierte und transmittierte Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{J}_i$, $\vec{J}_r$ und $\vec{J}_t$.

d) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten T und den Reflexionskoeffizienten R und überprüfen Sie explizit dass gilt: $T + R = 1$.

Zu kreuzen: 1ab,1cd,2,3,4