5. Tutorium - Quantentheorie I - 23.11.2012

1. Gegeben sei eine operatorwertige Funktion $\hat{F}(\hat{A})$ eines hermiteschen Operators $\hat{A}$, welche durch eine Potentzreihe darstellbar ist:

$$\hat{F}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n \quad \text{, wobei } f_n \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; \hat{A}^n = \prod_{i=1}^{n} \hat{A}.$$

   a) Zeigen Sie, dass auch $\hat{F}(\hat{A})$ in diesem Fall hermitesch ist.

   b) Sind die Eigenvektoren von $\hat{A}$ auch Eigenvektoren von $\hat{F}(\hat{A})$? Wie berechnen sich die Eigenwerte von $\hat{F}(\hat{A})$?

   c) Geben Sie darauf basierend $\hat{F}(\hat{A})$ in Spektraldarstellung an.

   d) Gegeben sei der Operator $\hat{S}$ bezüglich einer beliebigen Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ ($\{e\}$-Darstellung):

$$\hat{S}^{\{e\}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

   Berechnen Sie den Operator $\hat{B} = e^{\hat{S}}$ in der $\{e\}$-Darstellung.
   Hinweise:

   - *Die Exponentialfunktion eines Operators ist definiert über die Taylorreihe* $e^{\hat{S}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{S}^n$.
   - *Berechnen Sie zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\hat{S}$ und Verwenden Sie Ihre Einsichten aus Punkt c).*

2. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum seien zwei lineare Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle,\, |e_2\rangle,\, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} A|e_1\rangle &= a|e_1\rangle & B|e_1\rangle &= b|e_1\rangle \\ A|e_2\rangle &= -a|e_2\rangle & B|e_2\rangle &= -ib|e_3\rangle \\ A|e_3\rangle &= -a|e_3\rangle & B|e_3\rangle &= ib|e_2\rangle \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrizen $\hat{A}^{\{e\}}$ und $\hat{B}^{\{e\}}$, welche den Operatoren A und B in der Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ zugeordnet sind.

b) Zeigen Sie, dass die beiden Operatoren A und B selbstadjungiert und zueinander kompatibel sind.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{A}^{\{e\}}$ und $\hat{B}^{\{e\}}$, deren Entartungsgrad, sowie ein Orthonormalsystem $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ gemeinsamer Eigenvektoren von A und B.

d) Welche Matrizen $\hat{A}^{\{g\}}$ und $\hat{B}^{\{g\}}$ sind den beiden Operatoren A und B in der Basis $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ zugeordnet?

3. Betrachten Sie die Zeitentwicklung einer Wellenfunktion im unendlich tiefen Potentialtopf im Intervall $[0, L]$ (siehe Beispiel 3 der vorigen Woche). Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion gegeben durch ($k_n = n\pi/L$)

$$\psi(x, t = 0) = C\ [2\sin(k_1 x) + \sin(k_2 x) + 3\sin(k_3 x)]\ . \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante C.

b) Entwickeln Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Basis der Eigenzustände $\phi_n(x)$ und berechnen Sie darauf aufbauend die Zeitentwicklung von $\psi(x, t)$ für alle Zeiten $t > 0$. Plotten Sie die Zeitentwicklung von $|\psi(x, t)|^2$ für verschiedene Werte von t mit dem Computer.

c) Ist die zeitliche Entwicklung von $\psi(x, t)$ periodisch? Gibt es eine Zeit T zu der gilt: $\psi(x, T) = \psi(x, 0)$?

d) Nehmen Sie an, dass eine Energiemessung an dem durch die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ beschriebenen Teilchen durchgeführt wird. Welche Messwerte können Sie erhalten bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese Werte gemessen?

e) Berechnen Sie den Erwartungswert (i.e. den Mittelwert) der Energie für das Teilchen. Verändert sich dieser Wert mit der Zeit? Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

Zu kreuzen: 1,2,3