6. Tutorium - Quantentheorie I - 7.12.2012

1. Betrachten Sie ein zweiatomiges Molekül dessen Atome gegeneinander schwingen (sh. Abbildung 1). Bei kleinen Amplituden können diese Schwingungen durch ein harmonisches Oszillatorpotential der folgenden Form modelliert werden,

$$V(x) = \frac{1}{2} K(x - x_0)^2 ,$$

wobei x den Abstand der beiden Atomkerne zueinander angibt. Die Gleichgewichtsposition x_0 und die "Federkonstante" K werden durch die kovalente Bindung der Elektronen (vgl. mit Bsp. 1 aus dem 3. Tutorium) sowie durch die Abstoßung der beiden Atomkerne bestimmt und können als bekannt vorausgesetzt werden.

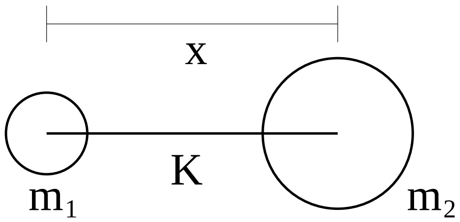

Abbildung 1: Zweiatomiges Molekül.

   a) Zeigen Sie wie die klassische Schwingungsfrequenz ν des Moleküls mit der Konstante K und der reduzierten Masse des Systems zusammenhängt.
   b) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie der Vibrationen (in eV), wenn Sie annehmen, dass es sich bei dem Molekül um Chlor (Cl_2) mit $K = 320N/m$ handelt.
   c) Berechnen Sie die Energiedifferenz zwischen dem ersten angeregten Vibrationszustand und dem Grundzustand (in eV). In welchem Wellenlängen- und Frequenzbereich befindet sich die Strahlung, die durch einen entsprechenden Übergang im Molekül entsteht?

d) Der Abstand x der beiden Atomkerne wird im Grundzustand der Vibrationsbewegung gemessen. Bestimmen Sie (durch numerische Integration) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass x größer ist als klassisch erlaubt.

2. Die Ortsdarstellung eines Energieeigenzustandes des harmonischen Oszillators ist gegeben als

$$\langle x \,|\, n \rangle = u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right),$$

wobei $H_n(x)$ das n-te Hermite-Polynom bezeichnet. Wie bereits bekannt, gelten die Beziehungen $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ und $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, wobei $|n\rangle$ der n-te Eigenzustand des harmonischen Oszillators ist. Die Operatoren $a^\dagger$ und a sind die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Zeigen Sie mit Hilfe einer Transformation in die Ortsdarstellung, dass die folgende rekursive Gleichung für die Hermite Polynome gilt:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

3. Betrachten Sie das im Pariser Panthéon angebrachte Foucaultsche Pendel. Dieses besteht aus einer Masse $m = 28$kg die an einem (masselosen) Draht der Länge $l = 67$m angebracht ist (sh. Abbildung 2). In der Schwingungsebene des Pendels führt die Masse Oszillationen mit einer Maximalamplitude von $x_{\max} = 3$m durch (ohne Reibung).

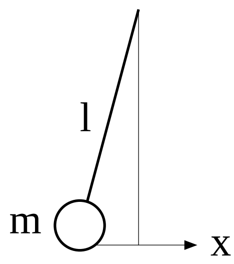

Abbildung 2: Klassisches Pendel.

a) Zeigen Sie wie die klassische Kreisfrequenz ω des Pendels mit der Drahtlänge l und der Fallbeschleunigung g zusammenhängt (unter der Voraussetzung von kleinen Schwingungsamplituden).

b) Welcher quantenmechanische Zustand beschreibt die klassische Pendelbewegung am genauesten? Passen Sie den entsprechenden Zustand an die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an: $x(t_0) = x_{\max}$ und $p(t_0) = 0$.

c) Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfen Δx, Δp für diesen Zustand. Überprüfen Sie, ob Ihr Zustand das kleinstmögliche Unschärfeprodukt erfüllt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für Δx mit der Größe eines Protons.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$ und die Energieunschärfe ΔE des Zustands. Bestätigen Ihre Ergebnisse die Erwartung, dass für makroskopische Objekte die relative Energieunschärfe klein ist, $\Delta E / \langle E \rangle \ll 1$?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ bei einer Energiemessung an Ihrem Oszillator-Zustand die Energie $E_n = \hbar\omega(2n+1)/2$ zu erhalten? Skizzieren Sie den Verlauf von $W(n)$. Um welche Verteilung handelt es sich hier?

Bemerkung: Mehr zum Thema Foucaultsches Pendel finden Sie unter folgendem Link: *http://en.wikipedia.org/wiki/Foucault's_pendulum*

Zu kreuzen: 1,2,3a-b,3c-e