8. Tutorium - Quantentheorie I - 21.12.2012

1. Gegeben sei ein Teilchem im $\mathbb{R}^3$, das durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{N}\,(x+y+z)\,\exp[-(r/a)^2], \quad r = \sqrt{\vec{x}^{\,2}}, \quad a, N \in \mathbb{R}.$$

   a) Stellen Sie die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x,y,z)$ mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar (für eine entsprechende Auflistung sh. http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelflächenfunktionen).

   b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen $\vec{L}^2$ und L_z auf?

   c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_y \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$ in obigem Zustand. (Verwenden Sie die Symmetrien des Systems um Ihre Rechnung möglichst zu vereinfachen.)

2. Betrachten Sie das Wasserstoffatom im Grundzustand

$$\langle \vec{r}\,|\, n=1,\ l=0,\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \qquad a_0 := \frac{\hbar^2}{m_e e^2}\left(1+\frac{m_e}{m_p}\right) \tag{1}$$

   Berechnen Sie:

   a) Den Erwartungswert und die Unschärfe des Abstandes des Elektrons vom Atomkern,

   b) den wahrscheinlichsten Wert dieses Abstandes und

   c) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Abstand $r < a_0$ anzutreffen.

   Hinweis:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\rho^\nu e^{-\beta\rho} = \frac{\nu!}{\beta^{\nu+1}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

$$\int \mathrm{d}\rho\,\rho^2 e^{-\beta\rho} = -\left[\frac{\rho^2}{\beta} + \frac{2\rho}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3}\right] e^{-\beta\rho} + C\,. \tag{3}$$

3. Wir betrachten das Elektron eines Wasserstoffatoms, dessen Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$|\psi\rangle = A\Big[2\,|1\;0\;0\rangle + \sqrt{3}\,|2\;0\;0\rangle - (i+1)\,|2\;1\;0\rangle + \sqrt{7}\,|2\;1\;-1\rangle + 2i\,|3\;2\;-1\rangle\Big],$$

wobei $|n\;l\;m\rangle$ die Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatomes bezeichnen. Normieren Sie $|\psi\rangle$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0:

a) die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung der Energie den Messwert

$$E_n = \frac{-\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

zu finden,

b) den Erwartungswert der Energie.

c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrates den Messwert $b_l = \hbar^2\,l(l+1)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden.

d) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z-Komponente des Bahndrehimpulses den Messwert $-\hbar$ zu finden,

e) den Erwartungswert der z-Komponente des Bahndrehimpulses.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Messgrößenpaares $\{E,L^2\}$ das Messwertpaar $\{-\hbar^2/(8ma_0^2), 2\hbar^2\}$ zu finden. Hängt das Ergebnis davon ab, ob *zuerst* die Energie und *unmittelbar darauf* das Bahndrehimpulsquadrat oder umgekehrt gemessen wird?

g) Überlegen Sie, was man für die in (a) bis (e) errechneten Größen erhält, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0, sondern $t > t_0$ gewählt wird. (keine Rechnung erforderlich)

Zu kreuzen: 1, 2, 3a-d, 3e-g