

# 9. Tutorium - Quantentheorie I - 11.01.2013

1. Wie lässt sich der Drehimpulsoperator  $\hat{L}_{z'}$  bezüglich einer beliebigen Achse  $z'$  als Funktion der bekannten Operatoren  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  ausdrücken? Verwenden Sie dazu die jeweiligen Winkel, die die Achse  $z'$  mit den Achsen  $x, y, z$  einschließt.

Wenden Sie Ihr Ergebnis für  $\hat{L}_{z'}$  nun auf einen Zustand  $|\psi\rangle$  an, welcher Eigenzustand von  $\hat{L}_z$  ist:  $\hat{L}_z|\psi\rangle = m|\psi\rangle$ . Zeigen Sie, dass Sie bei einer Messung der Observable  $L_{z'}$  im Mittel den Messwert  $m \cos \vartheta$  erhalten, wenn die Achse  $z'$  einen Winkel  $\vartheta$  mit der  $z$ -Achse einschließt. Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen "Vektormodells" für den Drehimpuls (sh. Plenumsfolie 3 der 24. Vorlesung vom 29.11.2012).

2. Betrachten Sie die stationären Zustände  $|n l m\rangle$  des Wasserstoffatoms ( $Z = 1$ ).
  - a) Das Wasserstoffatom befinde sich im angeregten Zustand mit  $n = 2$ . Bestimmen Sie die Frequenz des Photons, das beim Übergang in den Grundzustand emittiert wird. In welchem spektralen Bereich liegt die Frequenz? Hängen ihre Ergebnisse von den Quantenzahlen  $l$  und  $m$  ab? Warum (nicht)?
  - b) Besitzen die Eigenzustände  $|n l m\rangle$  des Wasserstoffatoms ein elektrisches Dipolmoment? Berechnen Sie dazu den Erwartungswert  $\langle n l m | \vec{d} | n l m \rangle$  des Dipoloperators  $\vec{d} = -e\vec{r}$ .  
*Hinweis: Stellen Sie Überlegungen zur Parität der auftretenden Ausdrücke an.*

3. Ein Spin  $s = 1/2$  befinde sich im Zustand

$$|\chi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |+\rangle + \frac{i}{2} |-\rangle,$$

wobei  $|+\rangle, |-\rangle$  die Eigenzustände von  $S_z$  zu den Eigenwerten  $\hbar/2$  bzw.  $-\hbar/2$  sind.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Spins in  $z$ -Richtung den Wert  $-\hbar/2$  zu erhalten?
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Unschärfe von  $S_y$ .

- c) Entlang welcher Raumrichtung müssen Sie den Spin des Zustands  $|\chi\rangle$  messen um mit Wahrscheinlichkeit 1 den Messwert  $\hbar/2$  zu bekommen? Fertigen Sie eine Skizze der entsprechenden Messapparatur (à la Stern-Gerlach) an.  
*Hinweis: Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus Bsp. 1.*
4. Ein Elektronenspin befinde sich in einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$  mit  $B > 0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich der Spin im Zustand  $|\chi(0)\rangle$  für den gilt:  $\hat{S}_y |\chi(0)\rangle = \hbar/2 |\chi(0)\rangle$ .
- a) Schreiben Sie die Zeitentwicklung  $|\chi(t)\rangle$  des Spinzustandes an.
- b) Was ist der kleinste Wert von  $B$ , für den sich bei einer Messung der  $x$ -Komponente des Spins zu einem vorgegebenen Zeitpunkt  $\tau > 0$  mit Wahrscheinlichkeit 1 der Messwert  $\hbar/2$  ergibt?

*Hinweis: Beachten Sie, dass Sie den Anteil der kinetischen Energie im Hamilton-Operator in diesem Fall vernachlässigen können.*

Zu kreuzen: 1, 2, 3, 4

**Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2013!!!**