Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Prof. Dr. A. Toschi, Dr. J. Tomczak, DI G. Rohringer, DI T. Schäfer

1. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
17	13	12	8+4*	50+4*

1. Theorieaufgaben

3+5+5+4=17 Punkte

a) Gegeben sei ein eindimensionales Problem

$$\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}(x) .$$

Unter welchen Bedingungen ist die Parität eine Erhaltungsgröße?

b) Gegeben sei die Wellenfunktion $\psi(x) = ze^{iqx}$ mit $z \in \mathbb{C}$. Als erstes wird eine Paritätsmessung durchgeführt. Geben Sie alle möglichen Messergebnisse, deren Wahrscheinlichkeit und die kollabierte Wellenfunktion nach der Messung an. Unmittelbar danach wird eine Impulsmessung durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man welches Messergebnis und welche kollabierte Wellenfunktion? Wie hängt dies vom Ergebnis der ersten Messung ab?

c) Sei $|\Psi\rangle \in L^2$ eine beliebige, normierte Wellenfunktion. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist der Operator $\big(z|\Psi\rangle\langle\Psi|\big)^3$ (i) hermitesch, (ii) antihermitesch, (iii) unitär, (iv) linear, (v) ein Projektions-Operator?

d) Konstruieren Sie ein Gaussches Wellenpaket als Superposition ebener Wellen bei $t = 0$, das zum Zeitpunkt $t = t_0 > 0$ [$\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$, freies Teilchen] seine minimale Unschärfe $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \hbar/2$ hat. (ohne Beweis)

2. Zeitentwicklung in Dirac-Notation

3+3+3+4=13 Punkte

Ein dreidimensionaler Vektorraum werde durch drei orthonormierte Basiszustände $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ aufgespannt. Das Quantensystem befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle - i|2\rangle + i|3\rangle).$$

Der Hamiltonoperator des Systems sei

$$\hat{H} = g|1\rangle\langle 1| + 2g|2\rangle\langle 2| + 2g|3\rangle\langle 3| - 2g|3\rangle\langle 2| - 2g|2\rangle\langle 3| .$$

a) Berechnen Sie die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ und geben Sie die unitäre Transformation U in Dirac-Notation an, die von der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ in die Eigenbasis von $\hat{H}$ transformiert.

b) Entwickeln Sie $|\psi\rangle$ in der Basis der Eigenfunktionen von $\hat{H}$.

c) Berechnen Sie den Energieerwartungswert des Zustands $|\Psi(t)\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Welche möglichen Messwerte können Sie bei einer Messung der Energie bei $t = 0$ für das obige System erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jede dieser Möglichkeiten?

d) Geben Sie $|\Psi(t)\rangle$ für den späteren Zeitpunkt $t = t_0 > 0$ an. Welche möglichen Messwerte können Sie bei einer Messung der Energie zum Zeitpunkt $t = t_0$ für das obige System erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne dieser Möglichkeiten?

3. Unschärfe für den Harmonischen Oszillator *4+5+3=12 Punkte*

Ein harmonischer Oszillator mit Masse m und Frequenz ω befindet sich zum Zeitpunkt $t{=}0$ im Zustand

$$|\psi(t{=}0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_0\rangle + |\psi_2\rangle\right).$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{p}\rangle(t)$ des Impuls-Operators zur Zeit $t > 0$ sowie die Impulsunschärfe $\Delta p(t)$.

b) Betrachten Sie den Erwartungswert $E(t) = \langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle$ für die Energie und berechnen Sie die entsprechende Energieunschärfe $\Delta E(t)$. Zeigen Sie explizit, dass die (verallgemeinerte) Heisenbergsche Unschärferelation für $\Delta p(t)\Delta E(t)$ erfüllt ist.

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Energie des Teilchens mit $E = \frac{\hbar\omega}{2}$ gemessen. Wie groß ist das Produkt $\Delta p(t)\Delta E(t)$ für $t{>}0$ nach der Messung?

4. δ-Potential *4+4+4*=8+4* Punkte*

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m im eindimensionalen Potential

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} -u\delta(x) & |x| < a \\ +\infty & |x| \geq a \end{cases} \qquad \text{mit } u, a > 0.$$

a) Skizzieren Sie das Potential $\hat{V}(x)$, drücken Sie explizit die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in den verschiedenen Regionen für eine Eigenfunktion $\phi(x)$ mit Energie E für dieses Potential aus und geben Sie die Rand- und Anschlussbedingungen an.

b) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung von **a)** für den speziellen Fall $E = 0$ und berechnen Sie die entsprechende Eigenfunktion $\phi(x)$. Welche Bedingung ergibt sich für u und a?

c) Machen Sie eine Skizze von $\phi(x)$ aus **b)**. Begründen Sie, warum $\phi(x)$ der Grundzustand des Systems für u und a aus **b)** ist.

Viel Erfolg!