9. Übung

19 Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

a) Schrödingerglg. in Kugelkoordinaten:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right]\psi(r,\vartheta,\varphi)=E\,\psi(r,\vartheta,\varphi)$$

Separationsansatz: $\psi(r,\vartheta,\varphi)=R(r)\cdot Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$

mit $\hat{L}^2\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)=\hbar^2\ell(\ell+1)\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$

$$\Rightarrow\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right]R(r)=E\,R(r)$$

mit $u(r)=r\cdot R(r)$

$$\Rightarrow\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right]u(r)=E\,u(r)\qquad(1)$$

- Verhalten für $r\to\infty$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right]u(r)=0$$

Lösung: $u_\infty(r)\sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}$

$$\rightarrow u''(r)=r^2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}-\underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}}_{\text{vernachlässigbar für } r\to\infty}$$

- Verhalten für $r\to 0$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\right]u(r)=0$$

Lösung: $u_0(r)=A\,r^{\ell+1}+B\,r^{-\ell}$

mit RB $u(0)=0$ folgt $B=0$

$$\rightarrow u_0(r)\sim r^{\ell+1}$$

$\Rightarrow$ allgemeiner Ansatz $u(r)=e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot\underbrace{w(r)}_{\text{Potenzreihe}}$

Berechnen der Ableitungen $u'(r)$ und $u''(r)$ und Einsetzen in (1) liefert:

$$w''(r)-2r\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)w'(r)-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)w(r)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}w(r)=-\frac{2mE}{\hbar^2}w(r)$$

Substitution $r = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, x$

$$\Longrightarrow \quad w''(x) - x\, w'(x) + \underbrace{\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)}_{=\lambda} w(x) - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\, w(x) = 0 \qquad (2)$$

verallgemeinerter Potenzreihenansatz:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$$

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)\, x^{n+\alpha-1}$$

$$w''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1)\, x^{n+\alpha-2}$$

Einsetzen in (2) und Umformen liefert:

$$a_0 \left[\alpha(\alpha-1) - \ell(\ell+1)\right] x^{\alpha-2} + a_1\left[(1+\alpha)\alpha - \ell(\ell+1)\right] x^{\alpha-1} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2+\alpha)(n+1+\alpha) - a_n(n+\alpha) + a_n\lambda - a_{n+2}\,\ell(\ell+1)\right] x^{n+\alpha} = 0$$

alle drei Terme müssen getrennt 0 ergeben:

- $x^{\alpha-2}$: $\quad \alpha(\alpha-1) = \ell(\ell+1) \qquad (3)$

  $\alpha = \ell+1$

  ($\alpha_2 = -\ell$ wegen der RB $u(0)=0$ nicht möglich)

- $x^{\alpha-1}$: $\quad \alpha(\alpha+1) = \ell(\ell+1) \qquad (4)$

  $\alpha = \ell$

  ($\alpha_2 = -\ell-1$ wegen $u(0)=0$ nicht möglich)

→ Es kann nicht gleichzeitig $\alpha = \ell+1$ und $\alpha = \ell$

$\Longrightarrow$ entweder $a_0 = 0$ oder $a_1 = 0$

- $x^{n+\alpha}$: $\quad a_{n+2} = -\dfrac{\lambda - (n+\alpha)}{(n+1+\alpha)(n+2+\alpha) - \ell(\ell+1)}\, a_n$

Rekursionsformel für die a_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{n}$$

Das ist dasselbe asymptotische Verhalten wie das der Koeffizienten von $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$

Dies würde einem $R(r) \sim \frac{1}{r} e^{\frac{3m\omega}{2\hbar} r^2}$ entsprechen.

$\Rightarrow$ nicht normierbar! $\Rightarrow$ Reihe muss abbrechen, d.h. ab einem bestimmten $\tilde{n}$ muss gelten

$$a_{\tilde{n}} = a_{\tilde{n}+1} = a_{\tilde{n}+2} = \dots = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda - (\tilde{n} + \alpha) = 0$$

Fallunterscheidung:

1) $a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$

das bedeutet (siehe (3)) $\alpha = \ell + 1$

und $n \in \mathbb{N}_g$ (eine gerade Zahl da $a_{n+2} = \dots a_n$)

$$\lambda - \tilde{n} - \ell - 1 = 0$$

$$\lambda = \tilde{n} + \ell + 1$$

$$\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} = \tilde{n} + \ell + 1$$

$$E = \hbar\omega\left(\tilde{n} + \ell + \frac{3}{2}\right) \qquad (5)$$

2) $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$

das bedeutet (siehe (4)) $\alpha = \ell$

und $n \in \mathbb{N}_{ung}$ (eine ungerade Zahl)

$$\lambda - \tilde{n} - \ell = 0$$

um dieselbe Form wie unter (5) zu erhalten, definieren wir $\tilde{n} = \tilde{m} + 1$ mit $\tilde{m} \in \mathbb{N}_g$

$$\Rightarrow \quad \lambda - \tilde{m} - 1 - \ell = 0$$

$$E = \hbar\omega\left(\tilde{m} + \ell + \frac{3}{2}\right)$$

Definiere Hauptquantenzahl $N = \tilde{n} + \ell = \tilde{m} + \ell$ mit $\tilde{n}, \tilde{m} \in \mathbb{N}_g$, also $\boxed{N = 2k + \ell}$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \boxed{E = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)}$$

b) $N = 1 = \tilde{n} + \ell \qquad \tilde{n} \in \mathbb{N}_g$

$\Longrightarrow \quad \tilde{n} = 0, \; \ell = 1 \qquad \Big| \quad a_{2n} = 0 \qquad a_1 \neq 0$

$E = \hbar\omega\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad \Big| \quad a_{2n+1,\, n \geq 1} = 0$

$\Rightarrow \quad w(x) = a_1 \cdot x^2$

- Eigenfunktionen | Eigenbasis des Unterraumes zu $N=1$:

$$\underset{\tilde{n}\;\ell}{\psi_{01m}}(\vec{r}) = R_{01}(r) \cdot Y_{1m}(\vartheta,\varphi) = \frac{u(r)}{r} \cdot Y_{1m}(\vartheta,\varphi) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} w(r)}{r} \cdot Y_{1m}(\vartheta,\varphi) = \underbrace{a}_{\text{Normierung}} \cdot r \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} Y_{1m}(\vartheta,\varphi)$$

$$\begin{cases} \psi_{01-1}(\vec{r}) = a r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} Y_{1-1}(\vartheta,\varphi) \sim r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \sin\vartheta \, e^{-i\varphi} \\ \psi_{010}(\vec{r}) = a r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} Y_{10}(\vartheta,\varphi) \sim r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \cos\vartheta \\ \psi_{011}(\vec{r}) = a r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} Y_{11}(\vartheta,\varphi) \sim r e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \sin\vartheta \, e^{i\varphi} \end{cases}$$

- Eigenfunktionen, die sich in der Form $f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$ schreiben lassen:

$$\psi_{010} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)} \underbrace{r\cos\vartheta}_{z} = \underbrace{e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}y^2}}_{g(y)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}z^2} \cdot z}_{h(z)}$$

$$\psi_{011} + \psi_{01-1} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \underbrace{r\sin\vartheta\cos\varphi}_{x}$$

$$\psi_{011} - \psi_{01-1} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \underbrace{r\sin\vartheta\sin\varphi}_{y}$$

Diese Eigenfunktionen entsprechen $|\underset{n_x}{0}\;\underset{n_y}{0}\;\underset{n_z}{1}\rangle$, $|1\,0\,0\rangle$ (mit $N = n_x + n_y + n_z$) und $|0\,1\,0\rangle$ aus Bsp. 16, UE7

c) $N = 2 = \tilde{n} + \ell \qquad \tilde{n} \in \mathbb{N}_g$

$\Longrightarrow \quad \tilde{n} = 2$ und $\ell = 0$ oder $\tilde{n} = 0$ und $\ell = 2$

1) $\tilde{n} = 2, \; \ell = 0 \qquad w(x) = a_0 x^{\ell+1} + a_2 x^{2+\ell+1} = a_0 x + a_2 x^3$

$a_{2n+1} = 0, \quad a_0 \neq 0$ und $a_2 \neq 0, \quad a_{2n,\, n \geq 2} = 0$

$$\psi_{200} = \left(a_0 + \tilde{a}_2 r^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} \underbrace{Y_{00}(\vartheta,\varphi)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 \cdot \frac{2m\omega}{\hbar}$$

$$a_2 = -\frac{\lambda-\alpha}{(1+\alpha)(2+\alpha)-\ell(\ell+1)}\,a_0 \qquad \ell = 1 \quad \alpha = \ell+1 = 1$$

$$\lambda = \hat{n}+\alpha = 2+\alpha$$

$$a_2 = -\frac{2}{2\cdot 3-0}\,a_0 = -\frac{1}{3}\,a_0$$

$$\psi_{200} = a_0\left(1-\frac{2}{3}\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,\underbrace{Y_{00}}_{\text{bereits normiert}}$$

Normierung (wird später für die Berechnung der Koeffizienten der gesuchten Linearkombinationen benötigt):

$$a_0^2\int_0^\infty dr\,r^2\left(1-\frac{2m\omega}{3\hbar}r^2\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}r^2} =$$

$$= a_0^2\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx\,x^2\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)^2 e^{-x^2} = a_0^2\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\pi^{1/4}}$$

$$\psi_{200} = \underbrace{\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^7\cdot\frac{1}{\pi}\right]^{1/4}}_{A}\sqrt{6}\left(\frac{\hbar}{m\omega}-\frac{2}{3}r^2\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\,Y_{00}(\vartheta,\varphi)$$

2) $\hat{n} = 0$, $\ell = 2$

$$a_{2n+1} = 0\,, \quad a_0 \neq 0\,, \quad a_{2n},\, n\geq 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x) = a_0\,x^{\ell+1} = a_0\,x^3$$

$$\psi_{02-1} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,e^{-i\varphi}$$

$$\psi_{021} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,e^{i\varphi}$$

$$\psi_{02-2} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot r^2\sin^2\vartheta\,e^{-2i\varphi}$$

$$\psi_{022} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot r^2\sin^2\vartheta\,e^{2i\varphi}$$

$$\psi_{020} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot r^2\left(3\cos^2\vartheta-1\right)$$

$\rightarrow$ Normierung:

$$c^2\int_0^\infty dr\,r^2\cdot r^4\cdot e^{-\frac{m\omega}{\hbar}r^2} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{7/2}\underbrace{\int_0^\infty dx\,x^6\,e^{-x^2}}_{15\sqrt{\pi}/16} = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{7/4}\cdot\frac{4}{\sqrt{15\sqrt{\pi}}} = \underbrace{\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^7\cdot\frac{1}{\pi}\right]^{1/4}}_{A}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}$$

- Eigenfunktionen, die sich in der Form $f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$ schreiben lassen:

$$\psi_{021}+\psi_{02-1} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot \underbrace{r^2\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}_{x\cdot z} \sim |\underset{n_x}{1}\,\underset{n_y}{0}\,\underset{n_z}{1}\rangle$$

$$\psi_{021}-\psi_{02-1} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot \underbrace{r^2\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}_{y\cdot z} \sim |0\,1\,1\rangle$$

$$\psi_{022}-\psi_{02-2} \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\cdot \underbrace{r^2\sin(2\varphi)\sin^2\vartheta}_{x\cdot y} \sim |1\,1\,0\rangle$$

Die restlichen drei Eigenfunktionen $\psi_{022}+\psi_{02-2}\sim x^2-y^2$, $\psi_{200}\sim \frac{\hbar}{m\omega}-\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)$ und $\psi_{020}\sim 2z^2-x^2-y^2$ müssen so linear kombiniert werden, dass jeweils nur eines der drei Koordinatenquadrate x^2, y^2 oder z^2 auftritt.

Zur expliziten Berechnung der Koeffizienten braucht es die korrekt normierten Eigenfunktionen

$$\psi_{020} = A\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(2z^2-x^2-y^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{022}+\psi_{02-2}) = A\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\sqrt{\frac{15}{16\pi}}\,(x^2-y^2) \equiv \psi_{02|2|}$$

$$\psi_{200} = A\sqrt{6}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}-\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)\right)$$

mit $\cancel{4}$ $f(r)=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}$ ergibt sich

$$|\overset{n_x}{0}\,\overset{n_y}{0}\,\overset{n_z}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,\psi_{020}-\psi_{200}\right) = -f(r)\left(\frac{\hbar}{2m\omega}-z^2\right)$$

$$|0\,2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\psi_{020}+\sqrt{2}\,\psi_{200}+\sqrt{3}\,\psi_{02|2|}\right) = -f(r)\left(\frac{\hbar}{2m\omega}-y^2\right)$$

$$|2\,0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\psi_{020}+\sqrt{2}\,\psi_{200}-\sqrt{3}\,\psi_{02|2|}\right) = -f(r)\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}-x^2\right)$$

20a) $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m^*} = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ mit $m^* = 0{,}067\, m_e$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z) = E\,\psi(x,y,z)$$

$$\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z)$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

$$\Longrightarrow\; -\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x) = E_x\,\psi_1(x)$$

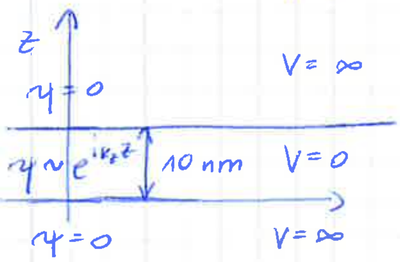
$$\psi_1(x) \sim e^{ik_x x} \qquad k_x = \frac{\sqrt{2m^* E_x}}{\hbar}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2}{dy^2}\psi_2(y) = E_y\,\psi_2(y)$$

$$\psi_2(y) \sim e^{ik_y y} \qquad k_y = \frac{\sqrt{2m^* E_y}}{\hbar}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2}{dz^2}\psi_3(z) = E_z\,\psi_3(z)$$

$$\psi_3(z) = a\,e^{ik_z z} = A\cos(k_z z) + B\sin(k_z z)$$



RB: $\psi_3(0) = A = 0$

$\psi_3(10\,\text{nm}) = B\cdot\sin(k_z\cdot 10^{-8}) = 0$

$k_z \cdot 10^{-8} = n\pi$

$k_z = 10^{8}\, n\pi$

$$E = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}}_{\approx\, n^2\cdot 0{,}056\,\text{eV}}$$

b) $\hat{H} = \sum_{i=1,2} t_\alpha \left(|i,\alpha\rangle\langle i+1,\alpha| + |i+1,\alpha\rangle\langle i,\alpha|\right)$

α .... Orbitale d_{xy}, d_{xz}, d_{yz}

$t_{xz} = t_{yz} = t_1 \qquad t_{xy} = t_2$

$$H = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} |1,\alpha\rangle & |2,\alpha\rangle & |3,\alpha\rangle \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} |1,\alpha\rangle \\ |2,\alpha\rangle \\ |3,\alpha\rangle \end{array} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & t & 0 \\ t & -\lambda & t \\ 0 & t & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda t^2 = 0 \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda^2 = 2t^2 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}\,t \end{array}$$

Eigenwerte von $\hat{H}$:

$-\sqrt{2}\,t_1$	2x entartet
$-\sqrt{2}\,t_2$	1fach
0	3x entartet
$\sqrt{2}\,t_2$	1 fach
$\sqrt{2}\,t_1$	2x entartet

c) $|i\rangle = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk\, e^{ikR_i}\,|k\rangle$ $\quad R_i = i\,a$
mit a Abstand zwischen den Gitterplätzen

$$\hat{H} = \sum_i t\left(|i\rangle\langle i+1| + |i+1\rangle\langle i|\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \sum_i t \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_1 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_2 \left[e^{i(k_1R_i - k_2 R_{i+1})}\,|k_1\rangle\langle k_2| + e^{-i(k_1R_i - k_2R_{i+1})}\,|k_2\rangle\langle k_1| \right] = \quad R_{i+1} = R_i + a$$

$$= t\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_1\,dk_2 \left[|k_1\rangle\langle k_2|\, e^{-ik_2a} \underbrace{\sum_i e^{i(k_1-k_2)R_i}}_{\frac{2\pi}{a}\delta(k_1-k_2)} + c.c.\right]$$

$$= t\,\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_1\,|k_1\rangle\langle k_1|\,\underbrace{\left(e^{-ik_1a} + e^{+ik_1a}\right)}_{2\cos(k_1a)} =$$

$$= t\,\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk\,|k\rangle\langle k|\,2\cos(ka)$$

$\Rightarrow$ $\hat{H}$ ist diagonal in $|k\rangle$ $\Rightarrow$ die Eigenwerte sind $2\cos(ka)$ und die Eigenfunktionen $|k\rangle$ mit $-\pi/a \leq k \leq +\pi/a$

explizit: $\hat{H}\,|k\rangle = t\,\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk'\,|k'\rangle\underbrace{\langle k'|k\rangle}_{\frac{2\pi}{a}\delta(k-k')}\,2\cos(k'a) =$

$$= t\cdot 2\cos ka\,|k\rangle$$