6. Übung zur Quantentheorie I – Musterlösung

13. Messprozess und Zeitentwicklung

$$\hat{H} = -g(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) = -\frac{2g}{\hbar}\hat{S}_x$$

Im Folgenden werden Matrix- und Vektordarstellungen in der Eigenbasis von $\hat{S}_z$, also in $B = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ angegeben. Der Zeitentwicklungsoperator wäre in der gemeinsamen Eigenbasis von $\hat{H}$ und $\hat{S}_x$ etwas einfacher zu berechnen und diagonal, aber dafür müsste $\hat{S}_y$ in diese Basis transformiert werden. Die Wahl der Basis macht also für den Rechenaufwand bei diesem Beispiel keinen großen Unterschied.

a) $S_y^{\{B\}} = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Lösen des Eigenwertproblems:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i\hbar/2 \\ +i\hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{\hbar}{2} \qquad \text{sind die möglichen Messwerte.}$$

Es ergeben sich die Eigenzustände $|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)$ zu $+\frac{\hbar}{2}$ und $|\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i\,|\downarrow\rangle)$ zu $-\frac{\hbar}{2}$.

Wahrscheinlichkeit für $+\frac{\hbar}{2}$:

$$P_+ = \langle\hat{p}_{\uparrow y}\rangle = \langle\psi|\uparrow_y\rangle\langle\uparrow_y|\psi\rangle = |\langle\uparrow|\uparrow_y\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Wahrscheinlichkeit für $-\frac{\hbar}{2}$:

$$P_- = \langle\hat{p}_{\downarrow y}\rangle = \langle\psi|\downarrow_y\rangle\langle\downarrow_y|\psi\rangle = |\langle\uparrow|\downarrow_y\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Erwartungswert: $\langle\hat{S}_y\rangle = P_+ \cdot \frac{\hbar}{2} + P_- \cdot (-\frac{\hbar}{2}) = 0$.

b) Zeitentwicklung: $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-it}{\hbar}\right)^n \frac{\hat{H}^n}{n!}$.
Potenzieren von $\hat{H}$:

$$\hat{H}^2 = g^2(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \qquad \Rightarrow \hat{H}^{2n} = g^{2n}\mathbb{1}, \quad \hat{H}^{2n+1} = +g^{2n}\hat{H}$$

Unter Verwendung der Taylorreihen der Winkelfunktionen formt man um:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-it}{\hbar}\right)^{2n}\frac{g^{2n}}{(2n)!}\mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-it}{\hbar}\right)^{2n+1}\frac{g^{2n}}{(2n+1)!}\hat{H} \\ &= \cos(\omega t)\mathbb{1} + i\sin(\omega t)(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \qquad \text{mit } \omega := \frac{g}{\hbar} \\ \Rightarrow U(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & i\sin(\omega t) \\ i\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In dieser Form ist der Zeitentwicklungsoperator nun einfach auf die zu betrachtenden Fälle anwendbar.

1. Bei $t = 0$ sei $+\frac{\hbar}{2}$ gemessen worden, die Wellenfunktion ist also bei $t = 0$ auf den Zustand $|\uparrow_y\rangle$ kollabiert. Zeitentwicklung bis zum Zeitpunkt t^* in der $\{B\}$-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t^*) & i\sin(\omega t^*) \\ i\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega t^*) - \sin(\omega t^*) \\ i\sin(\omega t^*) + i\cos(\omega t^*) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(t^*)\,|\uparrow_y\rangle = \cos(\omega t^*)\,|\uparrow_y\rangle - \sin(\omega t^*)\,|\downarrow_y\rangle$$

   Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich analog zu a):

$$P(+|+_0) = |\,\langle\uparrow_y|\,\hat{U}(t^*)\,|\uparrow_y\rangle\,|^2 = (\cos(\omega t^*))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t^*))$$

$$P(-|+_0) = |\,\langle\downarrow_y|\,\hat{U}(t^*)\,|\uparrow_y\rangle\,|^2 = (\sin(\omega t^*))^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t^*))$$

2. Bei $t = 0$ sei $-\frac{\hbar}{2}$ gemessen worden, die Wellenfunktion ist also auf den Zustand $|\downarrow_y\rangle$ kollabiert. Aus analoger Rechnung ergibt sich:

$$\hat{U}(t^*)\,|\downarrow_y\rangle = -\sin(\omega t^*)\,|\uparrow_y\rangle + \cos(\omega t^*)\,|\downarrow_y\rangle$$

$$P(+|-_0) = (\sin(\omega t^*))^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t^*))$$

$$P(-|-_0) = (\cos(\omega t^*))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t^*))$$

Um die absoluten Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, setzt man die bedingten Wahrscheinlichkeiten in das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit ein:

$$P_+ = P(+|+_0)P_{+,0} + P(+|-_0)P_{-,0} = \frac{1}{2}(\cos(\omega t^*))^2 + \frac{1}{2}(\sin(\omega t^*))^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_- = P(-|+_0)P_{+,0} + P(-|-_0)P_{-,0} = \frac{1}{2}(\sin(\omega t^*))^2 + \frac{1}{2}(\cos(\omega t^*))^2 = \frac{1}{2}$$

c) Nun werde zum Zeitpunkt 0 statt dem Spin die Energie gemessen. Da $\hat{H} = -\frac{2g}{\hbar}\hat{S}_x$, hat $\hat{H}$ die gleichen Eigenzustände, aber mit den Eigenwerten $\pm g$, d. h. den Eigenzustand $|\uparrow_x\rangle$ zum Eigenwert $-g$ und den Eigenzustand $|\downarrow_x\rangle$ zum Eigenwert $+g$. Die möglichen Messwerte sind also $\pm g$. Dies und die Eigenzustände können explizit durch lösen des Eigenwertproblems in Matrixdarstellung berechnet werden, $H^{\{B\}} = \begin{pmatrix} 0 & -g \\ -g & 0 \end{pmatrix}$:

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \qquad |\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad \Rightarrow \quad |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle)$$

Beide Messwerte haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, also 50%.

d) Messung der Energie zu einem späteren Zeitpunkt t^*. Es gibt wieder zwei Fälle:

1. Bei $t = 0$ sei $-g$ gemessen worden, die Wellenfunktion also auf $|\uparrow_x\rangle$ kollabiert.

$$U(t^*)\,|\uparrow_x\rangle^{\{B\}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t^*) & i\sin(\omega t^*) \\ i\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega t^*) + i\sin(\omega t^*) \\ i\sin(\omega t^*) + \cos(\omega t^*) \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(t^*)\,|\uparrow_x\rangle = e^{i\omega t^*}\,|\uparrow_x\rangle$$

   Zum Zeitpunkt t^* unterscheidet sich die Wellenfunktion von dem Zustand, in den sie kollabiert ist, nur um einen Phasenfaktor, daher wird mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder $-g$ gemessen und auf keinen Fall $+g$.

2. Bei $t = 0$ sei $+g$ gemessen worden. Aus der Zeitentwicklung folgt analog, dass die Wellenfunktion den Zustand, auf den sie kollabiert ist, bis auf den Phasenfaktor $e^{-i\omega t^*}$ beibehält. Es wird also mit Sicherheit $+g$ und auf keinen Fall $-g$ gemessen.

Für die absoluten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich damit jeweils 50%.

Die Zeitentwicklung eines Eigenzustands von $\hat{H}$ bewirkt nur einen Phasenfaktor, er bleibt also unter Zeitentwicklung ein Eigenzustand. Das kann auch durch dadurch ausgedrückt werden, dass $\hat{U}$ und $\hat{H}$ kommutieren ($[\hat{U}, \hat{H}] = 0$). Wenn $\hat{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle$, gilt auch $\hat{H}\hat{U}\left|\psi\right\rangle = \hat{U}\hat{H}\left|\psi\right\rangle = \hat{U}E\left|\psi\right\rangle = E\hat{U}\left|\psi\right\rangle$.

Die Zeitentwicklung eines Energieeigenzustands ändert den Eigenwert nicht, d. h. die Energie ist erhalten.

14. Verschränkte Zustände und Korrelationen

a) Zunächst wird der Operator $\hat{C}$ umgeformt:

$$\hat{C} = (\hat{S}_z)_1 \otimes (\hat{S}_z)_2 = ((\hat{S}_z)_1 \otimes \mathbb{1}_2)((\hat{S}_z)_2 \otimes \mathbb{1}_1) = \hat{S}_{z,1} \otimes \hat{S}_{z,2}$$

Es wird die folgende Zuordnung zwischen Basiskets und Koordinatenvektoren verwendet:

$$\left|\uparrow_1\right\rangle\left|\uparrow_2\right\rangle^{\{B\}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \left|\uparrow_1\right\rangle\left|\downarrow_2\right\rangle^{\{B\}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \left|\downarrow_1\right\rangle\left|\uparrow_2\right\rangle^{\{B\}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \left|\downarrow_1\right\rangle\left|\downarrow_2\right\rangle^{\{B\}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die gegebenen Vektoren und Operatoren ergeben sich damit zu:

$$\left|\uparrow\uparrow\right\rangle^{\{B\}} = \left|\uparrow_1\right\rangle\left|\uparrow_2\right\rangle^{\{B\}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \left|\uparrow\downarrow\right\rangle^{\{B\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$S_{z,1}^{\{B\}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}, \qquad S_{z,2}^{\{B\}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix},$$

$$C^{\{B\}} = S_{z,1}^{\{B\}}S_{z,2}^{\{B\}} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

b) Die Erwartungswerte für den Zustand $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle$ sind am einfachsten in Dirac-Notation zu berechnen:

$$\left\langle\uparrow\uparrow\right|\hat{S}_{z,1}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \left\langle\uparrow_1\right|(\hat{S}_z)_1\left|\uparrow_1\right\rangle\left\langle\uparrow_2\right|(\mathbb{1})_2\left|\uparrow_2\right\rangle = +\frac{\hbar}{2}$$

$$\left\langle\uparrow\uparrow\right|\hat{S}_{z,2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \left\langle\uparrow_1\right|(\mathbb{1})_1\left|\uparrow_1\right\rangle\left\langle\uparrow_2\right|(\hat{S}_z)_2\left|\uparrow_2\right\rangle = +\frac{\hbar}{2}$$

$$\left\langle\uparrow\uparrow\right|\hat{C}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \left\langle\uparrow_1\right|(\hat{S}_z)_1\left|\uparrow_1\right\rangle\left\langle\uparrow_2\right|(\hat{S}_z)_2\left|\uparrow_2\right\rangle = +\frac{\hbar^2}{4}$$

c) Hier müssen in Dirac-Notation jeweils vier Terme ausgewertet werden; die Matrixdarstellung hilft bei der Vermeidung von Fehlern. Für den Erwartungswert von $\hat{S}_{z,1}$ erhält man:

$$\langle\uparrow\downarrow|\,\hat{S}_{z,1}\,|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0, & 1, & -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}0, & 1, & -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Analoge Rechnung ergibt:

$$\langle\uparrow\downarrow|\,\hat{S}_{z,2}\,|\uparrow\downarrow\rangle = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \langle\uparrow\downarrow|\,\hat{C}\,|\uparrow\downarrow\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}$$

d) Betrachtung für den Zustand $|\uparrow\uparrow\rangle$:

$$G(\hat{S}_{z,1},\hat{S}_{z,2}) = \langle\hat{C}\rangle - \langle\hat{S}_{z,1}\rangle\langle\hat{S}_{z,2}\rangle = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2} = 0$$

Für den Zustand $|\uparrow\downarrow\rangle$ hingegen gilt:

$$G(\hat{S}_{z,1},\hat{S}_{z,2}) = \langle\hat{C}\rangle - \langle\hat{S}_{z,1}\rangle\langle\hat{S}_{z,2}\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} - 0\cdot 0 = -\frac{\hbar^2}{4} \neq 0$$

Der Zustand $|\uparrow\uparrow\rangle$ ist als Produkt zweier Kets darstellbar und damit nicht korreliert. $\langle\hat{S}_{z,1}\hat{S}_{z,2}\rangle = \langle\hat{S}_{z,1}\rangle\langle\hat{S}_{z,2}\rangle \Leftrightarrow G = 0$.

Der Zustand $|\uparrow\downarrow\rangle$ hingegen ist nicht als Produkt darstellbar. Er ist korreliert, also gilt $\langle\hat{S}_{z,1}\hat{S}_{z,2}\rangle \neq \langle\hat{S}_{z,1}\rangle\langle\hat{S}_{z,2}\rangle \Leftrightarrow G \neq 0$.