08/01/2014

5. PLENUM: Störungstheorie für den geladenen harmonischen Oszillator

Ladung — Elektrisches Feld

1. $$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{H_0} \underbrace{- qEx}_{H_1}$$

(im Skriptum) $H_1 = \lambda V$

H_0 "Ungestörter Hamilton-Operator" — H_1 "Störungsbeitrag"

- Eigenbasis von H_0: $\{|\varphi_n^{(0)}\rangle\} = \{|n\rangle\}$ $\quad \begin{cases} H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle \\ a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{cases}$

- In dieser Basis: $X = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^+)$ mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Bemerkung: Die Identifizierung von H_1 als Störungsbeitrag von H_0 ist möglich, wenn die typischen Energie-Skalen von H_1 viel kleiner als die typischen Energie-Skalen von H_0 (z.B., wie hier, die Energie-Separation zwischen den verschiedenen Eigenwerten von H_0) sind.

Ganz Konkret: Typische Energie-Skala von H_1 $\sim qEx_0 = qE\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ — typische Energie-Skala von H_0 $\sim \hbar\omega$

$\Rightarrow qE\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \ll \hbar\omega \Longrightarrow$ Immer möglich, wenn E genug SCHWACH ist

Lösung des Beispiels:

1.) Die Matrix-Elemente des Störungsterms H_1 in der Eigenbasis von H_0 sind Folgende:

$$\langle m | H_1 | n \rangle = -qE \langle m | X | n \rangle = -\frac{qEx_0}{\sqrt{2}} \langle m | (a + a^+) | n \rangle$$

$$= \begin{cases} -\frac{qEx_0}{\sqrt{2}} \sqrt{n} & \text{wenn } m = n-1 \quad (\text{aus } \langle m|a|n\rangle) \\ -\frac{qEx_0}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1} & \text{wenn } m = n+1 \quad (\text{aus } \langle m|a^+|n\rangle) \\ \phi & \text{sonst} \end{cases}$$

Deswegen bekommt man für die ~~Korrekturen~~ der Eigenwerte:

1° Ordnung: $E_n^{(1)} = \langle n | H_1 | n \rangle = \phi$ ✓

2° Ordnung: $$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H_1 | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} =$$

$$= \frac{q^2E^2x_0^2}{2} \left[\frac{|\langle n-1 | a | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|\langle n+1 | a^+ | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} \right] =$$

$$= \frac{q^2E^2x_0^2}{2} \left[\frac{n}{\hbar\omega(\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}+1-\frac{1}{2})} + \frac{n+1}{\hbar\omega(\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}-1-\frac{1}{2})} \right] = -\frac{q^2E^2x_0^2}{2\hbar\omega} = -\frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$ ✓

Identisch für alle n!

und für die ~~Korrekturen~~ der Eigenvektoren:

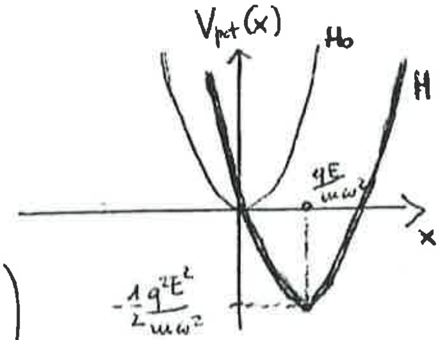
$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} |m\rangle \frac{\langle m | H_1 | n \rangle}{E_n^0 - E_m^0} = |n-1\rangle^{(0)} \left(-\frac{qEx_0\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,\hbar\omega} \right) +$$

$$+ |n+1\rangle^{(0)} \left(\frac{qEx_0\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\,\hbar\omega} \right) = \frac{qEx_0}{\sqrt{2}\,\hbar\omega} \left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^{(0)} - \sqrt{n}\,|n-1\rangle^{(0)} \right]$$ ✓

3) <u>Exakte Lösung</u>: das Potential $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx$ ist nur ein harmonisches Potential mit einem verschobenen Minimum (siehe Test 1!)

- ANALYTISCH -

- GRAFISCH -



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - \frac{2qEx}{m\omega^2}\right) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - \frac{2qEx}{m\omega^2} + \frac{q^2E^2}{m^2\omega^4} - \frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2}$$

HARMONISCHER OSZILLATOR & KONSTANTE VERSCHIEBUNG!
MIT GLEICHEM ω

Deswegen sind die exakten Eigenwerte die folgenden:

- $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2} = E_n^{(0)} - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2}$
- Vergleich mit Störungstheorie (vom Punkt 1.)
- $E_n \simeq E_n^{(0)} + \underset{\emptyset}{\underset{\shortparallel}{E_n^{(1)}}} + E_n^{(2)} + \dots = E_n^{(0)} - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2} + \dots$

In diesem Fall, liefert die 2. Ordnung Störungstheorie schon das <u>korrekte Ergebnis</u>!

$\Rightarrow$ Eigentlich kann man zeigen, dass alle höheren Ordnungen der Störungstheorie - in diesem Fall - immer $\emptyset$ liefern.

- <u>Exakte Eigenvektoren</u>: Da H ein harmonischer Oszillator mit einer verschobenen Gleichgewicht-Position (von $\bar{x} = 0$ nach $\bar{x} = \frac{qE}{m\omega^2}$), muss man nur die Eigenvektoren von H_0 verschieben!

$\longrightarrow$ Translation Operator

$$|n\rangle_{exakt} = T\left(\frac{qE}{m\omega^2}\right)|n\rangle^{(0)} \quad , \text{mit } T(\bar{x}) = e^{-i\frac{p\bar{x}}{\hbar}}$$

Verschiebung der X-Koordinat

In der Eigenbasis von H_0, hat man $p = \dfrac{i p_0}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$ (mit $p_0 = \sqrt{\hbar\omega m}$)

$$\Rightarrow \quad T\left(\frac{qE}{m\omega^2}\right) = e^{\cancel{-i}\, i \frac{p_0\, q E}{\sqrt{2}\,\hbar\, m\omega^2}(a^+ - a)}$$

$$|n\rangle_{exakt} = \left(\mathbb{1} + \frac{p_0 q E}{\sqrt{2}\hbar m\omega^2}(a^+ - a) + \dots\right)|n\rangle^{0}$$

$$= |n\rangle^{0} + \frac{p_0 q E}{\sqrt{2}\hbar m\omega^2}\left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^{0} - \sqrt{n}\,|n-1\rangle^{0}\right] + \dots$$

Diese sind Gleich!

- Vergleich mit der Störungstheorie:

$$|n\rangle_{Stör} = |n\rangle^{0} + \frac{qEx_0}{\sqrt{2}\hbar\omega}\left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^{0} - \sqrt{n}\,|n-1\rangle^{0}\right] + \dots$$

$$\frac{qEx_0}{\sqrt{2}\hbar\omega} = \frac{qE}{\sqrt{2m\hbar}\,\omega^{3/2}} \quad ; \quad \frac{p_0 qE}{\sqrt{2}\hbar m\omega^2} = \frac{qE}{\sqrt{2\hbar m}\,\omega^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ Für die Eigenvektoren, liefert die 1. Ordnung Störungstheorie den 1. Beitrag der Entwicklung für die exakten verschobenen Eigenvektoren!