
Nachtest zur Quantentheorie I

Wintersemester 2013/2014

Test A	Name:	Matrikelnr.:	B1	B2	B3	B4	Σ
			10	14	13+6*	13	50+6*

1. δ -Potential

2+6+2=10 Punkte

Gegeben sei der eindimensionale Hamiltonian $H = p^2/(2m) - a\delta(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

- Welche Bedingung gibt es für die Energie E gebundener Zustände?
- Berechnen Sie die Eigenenergien und Eigenfunktionen der gebundene Zustände.
- Wieviele gebundene Zustände gibt es? Wie kommt man von diesen zu einem vollständigen Orthonormalsystem?

2. Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

4+4+6=14 Punkte

Gegeben sei der Hamiltonoperator eines zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators

$$H_0 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

welcher durch das Potential

$$W = \gamma \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} x^2 y^2$$

gestört wird ($m, \omega, \hbar, \gamma \in \mathbb{R}^+$).

- Drücken Sie H_0 und W durch die Leiteroperatoren a_x^\dagger , a_x , a_y^\dagger und a_y aus. Geben Sie weiters eine allgemeine Formel für die Energieniveaus und Eigenfunktionen (z.B. als Ausdruck mit Leiteroperatoren) des ungestörten Oszillators an.
- Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur erster Ordnung für den Grundzustand von $H = H_0 + W$.
- Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur zweiter Ordnung für den Grundzustand von $H = H_0 + W$. Geben Sie auch die Grundzustandsenergie inkl. Korrekturen 1. und 2. Ordnung an.

3. Verständnisfragen

5+6*+5+3=13+6* Punkte

- a) Der Operator für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte in einer Dimension ist $\hat{j} : \Psi \rightarrow j(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) - \Psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(x)]$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t)$ die Kontinuitätsgleichung für die Teilchenzahlerhaltung erfüllt. Ist \hat{j} ein linearer Operator?
- b) Gegeben sei das Wasserstoffproblem und ein Störterm $V(\mathbf{r}) = \lambda x$. Geben Sie in 1. Ordnung entarteter Störungstheorie (i) die Eigenfunktionen (ggf. ohne Vorfaktoren) und (ii) die Energiekorrektur der 1. angeregten Eigenzuständen an (explizite λ -Abhängigkeit, nichtverschwindende Integrale über Wasserstoffeigenfunktionen müssen aber nicht explizit berechnet werden).
- c) Gegeben sei ein Elektron in der d -Schale (Drehimpuls $l = 2$) mit Spin $s = 1/2$. Welche möglichen Werte für den Gesamtdrehimpuls j gibt es? Zeigen Sie, dass Sie für dieses Beispiel in der j, m_j Basis genauso viele Zustände haben wie in der m, s_z Basis. Geben Sie die Eigenfunktion(en) zum maximal möglichen Drehimpuls m_j in z -Richtung an.
- d) Geben Sie für ein zylindersymmetrisches Potential $V(x, y, z) \equiv V(r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ eine Erhaltungsgröße (neben der Energie) an.

4. Messprozess und Zeitentwicklung

3+5+3+2=13 Punkte

Gegeben sei ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ im äußeren, in die z -Richtung zeigenden Magnetfeld B . Der entsprechende Hamiltonoperator sei durch

$$\hat{H} = -g \hat{S}_z B \quad (1)$$

gegeben. Wir werden Messungen von Spin-Komponenten durchführen, die zu folgenden Operatoren gehören: $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} (-i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|)$, $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\Psi(t = 0)\rangle = |\psi\rangle = |\downarrow\rangle$.

- a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird S_x gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Messergebnis? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\hat{S}_x|\psi\rangle$.
- b) Nach der Messung von S_x zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Observable S_x gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte und berechnen Sie die absoluten Wahrscheinlichkeiten, sowie die bedingten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Messergebnis bei a).
- c) In einem zweiten Versuchsaufbau wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Energie gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?
- d) Nach der Messung der Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Energie gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte für diese Messung und berechnen Sie die absoluten und bedingten Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte in Abhängigkeit von c).

Viel Erfolg!