Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Prof. Dr. A. Toschi,
Dr. J. Tomczak, Dr. G. Rohringer, DI T. Schäfer

Nachtest zur Quantentheorie I

Wintersemester 2013/2014

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
13	10	14	13+6*	50+6*

1. Magnetfeld in z-Richtung

3+5+3+2=13 Punkte

Gegeben sei ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ im äußeren, in die z-Richtung zeigenden Magnetfeld B. Der entsprechende Hamiltonoperator sei durch

$$\hat{H} = -g\,\hat{S}_z\,B \tag{1}$$

gegeben. Wir werden Messungen von Spin-Komponenten durchführen, die zu folgenden Operatoren gehören: $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}(-i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|)$, $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\Psi(t=0)\rangle = |\psi\rangle = |\downarrow\rangle$.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird S_y gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Messergebnis? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\hat{S}_y|\psi\rangle$.

b) Nach der Messung von S_y zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Observable S_y gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte und berechnen Sie die absoluten Wahrscheinlichkeiten, sowie die bedingten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Messergebnis bei a).

c) In einem zweiten Versuchsaufbau wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Energie gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

d) Nach der Messung der Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Energie gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte für diese Messung und berechnen Sie die absoluten und bedingten Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte in Abhängigkeit von c).

2. 1-dimensionales Potential

2+6+2=10 Punkte

Gegeben sei der eindimensionale Hamiltonian

$$H = p^2/(2m) - \beta\delta(x) \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

a) Welche Bedingung gibt es für die Energie E gebundener Zustände?

b) Berechnen Sie die Eigenenergien und Eigenfunktionen der gebundene Zustände.

c) Wieviele gebundene Zustände gibt es? Wie kommt man von diesen zu einem vollständigen Orthonormalsystem?

3. Störungstheorie

4+4+6=14 Punkte

Gegeben sei der Hamiltonoperator eines zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

welcher durch das Potential $V = \beta \frac{m^2\omega^3}{\hbar} x^2 y^2$ gestört wird (m, ω, $\hbar$, $\beta \in \mathbb{R}^+$).

a) Drücken Sie H_0 und V durch die Leiteroperatoren $a_x^\dagger$, a_x, $a_y^\dagger$ und a_y aus. Geben Sie weiters eine allgemeine Formel für die Energieniveaus und Eigenfunktionen (z.B. als Ausdruck mit Leiteroperatoren) des ungestörten Oszillators an.

b) Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur erster Ordnung für den Grundzustand von $H = H_0 + V$.

c) Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur zweiter Ordnung für den Grundzustand von $H = H_0 + V$. Geben Sie auch die Grundzustandsenergie inkl. Korrekturen 1. und 2. Ordnung an.

4. Verständnisfragen

5+5+3+6=13+6* Punkte*

a) Der Operator für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte in einer Dimension ist $\hat{j} : \Psi \to j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\Psi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x) - \Psi(x)\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*(x)\right]$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ die Kontinuitätsgleichung für die Teilchenzahlerhaltung erfüllt. Ist $\hat{j}$ ein linearer Operator?

b) Gegeben sei ein Elektron in der p-Schale (Drehimpuls $l = 1$) mit Spin $s = 1/2$. Welche möglichen Werte für den Gesamtdrehimpuls j gibt es? Zeigen Sie, dass Sie für dieses Beispiel in der j, m_j Basis genausoviele Zustände haben wie in der m, s_z Basis. Geben Sie die Eigenfunktion(en) zum maximal möglichen Drehimpuls m_j in z-Richtung an.

c) Geben Sie für ein zylindersymmetrisches Potential $V(x,y,z) \equiv V(r_\perp = \sqrt{x^2+y^2}, z)$ eine Erhaltungsgröße (neben der Energie) an.

d) Gegeben sei das Wasserstoffproblem und ein Störterm $V(\mathbf{r}) = \lambda y$. Geben Sie in 1. Ordnung entarteter Störungstheorie (i) die Eigenfunktionen (ggf. ohne Vorfaktoren) und (ii) die Energiekorrektur der 1. angeregten Eigenzuständen an (explizite λ-Abhängigkeit, nichtverschwindende Integrale über Wasserstoffeigenfunktionen müssen aber nicht explizit berechnet werden).

Viel Erfolg!