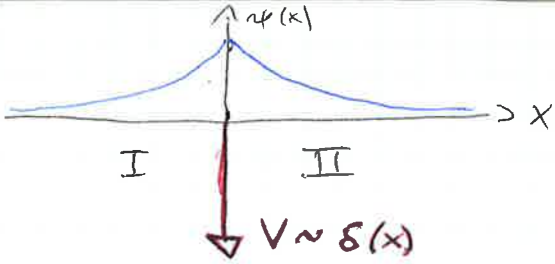
A: 1. δ-Potential

B: 2. 1-dimensionales Potential



a) Für gebundene Zustände ist $\underline{E < 0}$.

b) Ansatz für die Wellenfunktion:
$$\left.\begin{aligned}\psi_I(x) &= A e^{\varkappa x}\\ \psi_{II}(x) &= B e^{-\varkappa x}\end{aligned}\right\}\quad \varkappa := \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Anschlussbedingungen:
$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \Rightarrow A = B;\qquad \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}\,\psi(0)$$
$$\varkappa A + \varkappa A = \frac{2m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a} A \Rightarrow \varkappa = \frac{m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}$$

Bzw $\underline{-E} = \frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m} = \underline{\frac{m}{2\hbar^2}\overset{\beta^2}{a^2}}$

Normierung: $1 = 2\int_0^\infty dx\,|A e^{-\varkappa x}|^2 = 2|A|^2 \left.\frac{e^{-2\varkappa x}}{-2\varkappa}\right|_0^\infty = \frac{|A|^2}{\varkappa}$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\varkappa}\, e^{-\varkappa|x|} = \sqrt{\frac{m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}}\,\exp\left(-\frac{m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}\,|x|\right)$$

c) Es gibt 1 gebundenen Zustand; das VONS erhält man durch die ungebundenen Zustände (~ ebene Wellen e^{ikx}).

2. Bsp. 2D harm. Osz. (A) (B), β statt ν

a) $H_0 = \hbar\omega(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1)$, $W = \frac{\nu\hbar}{4}(a_x^+ a_x^+ + a_x^+ a_x + a_x a_x^+ + a_x a_x) \cdot (a_y^+ a_y^+ + a_y^+ a_y + a_y a_y^+ + a_y a_y)$

$n = n_x + n_y$	E_n^0	Entartung
0	$\hbar\omega$	1
1	$2\hbar\omega$	2
2	$3\hbar\omega$	3
$\vdots$	$\vdots$	

$E_n^0 = \hbar\omega(n+1)$

$\Rightarrow$ GZ: $n=0 \Rightarrow |n_x=0, n_y=0\rangle$

b) $\varepsilon_0^{(1)} = \langle 0,0|W|0,0\rangle = \frac{\nu}{4}\hbar\omega \Rightarrow E_0^{[\leq 1]} = E_0^0 + \varepsilon_0^{(1)} = \left(1 + \frac{\nu}{4}\right)\hbar\omega$

c) $\varepsilon_0^{(2)} = \frac{|\langle 2,0|W|0,0\rangle|^2}{-2\hbar\omega} + \frac{|\langle 0,2|W|0,0\rangle|^2}{-2\hbar\omega} + \frac{|\langle 2,2|W|0,0\rangle|^2}{-4\hbar\omega} = -\frac{3\nu^2}{16}\hbar\omega$

$\Rightarrow E_0^{[\leq 2]} = E_0^0 + \varepsilon_0^{(1)} + \varepsilon_0^{(2)} = \left(1 + \frac{\nu}{4} - \frac{3\nu^2}{16}\right)\hbar\omega$

3. (4.) Verständnisfrage

a) $\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\rho(x,t)}_{\psi^*(x,t)\psi(x,t)} + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0$ Kontinuitätsglg.

Teilchenzahl

$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\psi + \psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)} + \frac{\hbar}{2mi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + \psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - c.c.\right] = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{-i\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*\right) + \cancel{V\psi^*}\right]\psi}_{cc.\ S\text{-Glg.}} + \psi^*\underbrace{\frac{1}{i\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \cancel{V\psi}\right]}_{S.\text{-Glg}} + \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - c.c.\right] = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\hbar}{2mi}\left[\cancel{\psi\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*\right)} - \cancel{\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi}\right] + \frac{\hbar}{2mi}\left[\cancel{\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi} - \cancel{c.c.}\right] = 0$

cc

qed

j ist <u>kein</u> linearer Operator z.B. $j(2\cdot\psi) = \underbrace{4}_{\neq 2} j(\psi)$

b) d) Wir betrachten L L_{x} y Basis: $|n\,\ell\, m_{x}\rangle$ y

1. angeregter Zustand: $n=2$ $|200\rangle$ $|210\rangle$ $|21\pm1\rangle$ 4x entartet

Dies ist gegenüber dem Stark-Effekt der Vorlesung mit $V\sim z$ lediglich von z- in x-Richtung gedreht.

$\Rightarrow \langle 2\,\ell\, m_{x}|\,\lambda x\,|2\,\ell'\, m'_{x}\rangle \neq 0$ (y) nur für $m_x = m_x'$ und $\ell \neq \ell'$

$\Rightarrow$ lediglich $\langle 210|\,\lambda x\,|200\rangle \equiv \lambda\hat{V} \neq 0$

entartete Störungstheorie: Matrix V in entarteten EF:

$$\begin{array}{cccc} 200 & 210 & 211 & 21\text{-}1 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda\hat{V} & 0 & 0 \\ \lambda\hat{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

EW	EF
$\lambda\hat{V}$	$\{|200\rangle + |210\rangle\}/\sqrt{2}$
$-\lambda\hat{V}$	$\{|200\rangle - |210\rangle\}/\sqrt{2}$
0	$|211\rangle$
0	$|21-1\rangle$

Energie-korrektur in 1. Ordnung Zugehörige EF

c) b) $j = \ell \pm \frac{1}{2} = \begin{matrix} 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$

$m_j = -j \cdots j \quad (2j+1)$ Möglichkeiten

$j\, m_j$ Basis: $\qquad\qquad m \quad S_z$ Basis

$$\underbrace{(2 \cdot 2\tfrac{1}{2} + 1)}_{1\frac{1}{2}} + \underbrace{(2 \quad 1\tfrac{1}{2} + 1)}_{\frac{1}{2}} = \underbrace{6+4}_{4+2} = \underbrace{10}_{6} = \underbrace{\overset{5}{\underset{2}{}}}_{2\ell+1} \cdot \underbrace{2}_{\text{Spin}} \qquad \square$$

$$|j\, m_j = \pm j\rangle = |\ell\, m_\ell = \pm \ell\rangle \otimes |s\, s_z = \pm \tfrac{1}{2}\rangle$$

d) c) $L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)$

$$\underbrace{\frac{\hbar}{i}\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)}_{L_z} V = \frac{\hbar}{i}\left[x \cdot \frac{\partial V}{\partial r_\perp}\frac{\partial r_\perp}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial r_\perp}\frac{\partial r_\perp}{\partial x}\right] + V L_z$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\left(\cancel{x \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}} - \cancel{y \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right) + V L_z$$

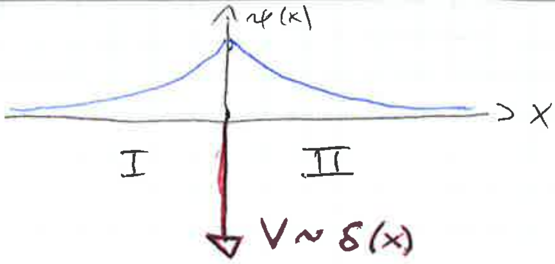
$$= V L_z \qquad \Rightarrow [L_z, V] = 0$$

ebenfalls $\left[L_z, \frac{p^2}{2m}\right] = 0$

$\Rightarrow [L_z, H] = 0 \qquad L_z$ ist Erhaltungsgröße

A: 1. δ-Potential

B: 2. 1-dimensionales Potential



a) Für gebundene Zustände ist $\underline{E<0}$.

b) Ansatz für die Wellenfunktion:
$$\left.\begin{aligned}\psi_I(x) &= A e^{\varkappa x}\\ \psi_{II}(x) &= B e^{-\varkappa x}\end{aligned}\right\}\ \varkappa := \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Anschlussbedingungen:

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \Rightarrow A = B; \qquad \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}\,\psi(0)$$

$$\varkappa A + \varkappa A = \frac{2m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a} A \Rightarrow \varkappa = \frac{m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}$$

Bzw $\underline{-E} = \frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m} = \underline{\frac{m}{2\hbar^2}\overset{\beta^2}{a^2}}$

Normierung: $$1 = 2\int_0^\infty dx\,|A e^{-\varkappa x}|^2 = 2|A|^2 \left.\frac{e^{-2\varkappa x}}{-2\varkappa}\right|_0^\infty = \frac{|A|^2}{\varkappa}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\varkappa}\, e^{-\varkappa|x|} = \sqrt{\frac{m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}}\, \exp\left(-\frac{m}{\hbar^2}\overset{\beta}{a}\,|x|\right)$$

c) Es gibt 1 gebundenen Zustand; das VONS erhält man durch die ungebundenen Zustände (~ ebene Wellen e^{ikx}).