Musterlösung 1. Test QM 1 WS 2013

Gruppe A: Beispiel ① **Gruppe B**: Beispiel ③

Zeitentwicklung des Anfangszustandes: $\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\omega}{2}t}|\psi_0\rangle \mp e^{i\frac{5\omega}{2}t}|\psi_2\rangle\right)}$

ⓐ •) $\langle \begin{smallmatrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{smallmatrix} \rangle (t)$:

$$\begin{smallmatrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{smallmatrix} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2m\omega}}\,\frac{1}{i}\left(\hat{a} \pm \hat{a}^\dagger\right)$$

$$\langle \begin{smallmatrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{smallmatrix} \rangle (t) \;=\; \langle\psi(t)|\begin{smallmatrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{smallmatrix}|\psi(t)\rangle \;=$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2m\omega}}\,\frac{1}{i}\left[\left(\langle\psi_0|\,e^{i\frac{\omega}{2}t} \mp \langle\psi_2|\,e^{i\frac{5\omega}{2}t}\right)\cdot\left(\hat{a} \pm \hat{a}^\dagger\right)\cdot\left(e^{-i\frac{\omega}{2}t}|\psi_0\rangle \mp e^{-i\frac{5\omega}{2}t}|\psi_2\rangle\right)\right] = 0$$

da $\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) den Zustand um 1 erniedrigt (erhöht)!

$$\bullet)\ \langle \begin{smallmatrix}\hat{x}^2\\ \hat{p}^2\end{smallmatrix}\rangle (t) = \pm\frac{\hbar}{4}\,\frac{m\omega}{m\omega}\left[\left(\langle\psi_0|\,e^{i\frac{\omega}{2}t} \mp \langle\psi_2|\,e^{i\frac{5\omega}{2}t}\right)\cdot\left(\hat{a} \pm \hat{a}^\dagger\right)^2\cdot\left(|\psi_0\rangle\,e^{-i\frac{\omega}{2}t} \mp |\psi_2\rangle\,e^{-i\frac{5\omega}{2}t}\right)\right]$$

$$= \pm\frac{\hbar}{4}\,\frac{m\omega}{m\omega}\left[\pm\langle\psi_0|\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=1+2\hat{a}^\dagger\hat{a}=1+2\hat{n}}|\psi_0\rangle \pm \langle\psi_2|\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=1+2\hat{n}}|\psi_2\rangle \mp \langle\psi_0|\,\hat{a}\hat{a}\,|\psi_2\rangle\,e^{-i2\omega t} \mp \langle\psi_2|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\,|\psi_0\rangle\,e^{i2\omega t}\right]$$

$$= \pm\frac{\hbar}{4}\,\frac{m\omega}{m\omega}\left[\pm 1 \pm 5 \mp\sqrt{2}\,\left(\underbrace{e^{-i2\omega t} + e^{i2\omega t}}_{=\,2cos(2\omega t)}\right)\right] =$$

Heisenberg'sche Unschärferelation:

$$\left(\Delta \begin{matrix}\hat{x}(t)\\ \hat{p}(t)\end{matrix}\right)\left(\Delta E\right) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi(t)|\left[\begin{matrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{matrix},\hat{H}\right]|\psi(t)\rangle\right|$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

$$\longrightarrow \left[\begin{matrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{matrix},\ \hat{H}\right] = \begin{cases}\frac{1}{2m}\left[\hat{x},\hat{p}^2\right] = \frac{1}{2m}\left\{\hat{p}\underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{-\frac{\hbar}{i}} + \underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{-\frac{\hbar}{i}}\hat{p}\right\} = -\frac{\hbar}{im}\hat{p} \\ \frac{1}{2}m\omega^2[\hat{p},\hat{x}^2] = \frac{1}{2}m\omega^2\left\{\hat{x}\underbrace{[\hat{p},\hat{x}]}_{=\frac{\hbar}{i}} + \underbrace{[\hat{p},\hat{x}]}_{\frac{\hbar}{i}}\hat{x}\right\} = \frac{\hbar m\omega^2}{i}\hat{x}\end{cases}$$

$$\text{Es wurde schon gezeigt: } \langle\psi(t)|\underbrace{\begin{matrix}\hat{p}\\ \hat{x}\end{matrix}}_{\propto\left[\begin{matrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{matrix},\hat{H}\right]}|\psi(t)\rangle \equiv 0$$

$$\longrightarrow \left(\Delta \begin{matrix}\hat{x}(t)\\ \hat{p}(t)\end{matrix}\right)\left(\Delta E\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{m\omega}\frac{\hbar}{2}\cdot\left[3-\sqrt{2}cos(2\omega t)\right]}\cdot\hbar\omega \geq 0 \qquad \surd$$

Nach der Messung der Energie $\frac{\hbar\omega}{2} \equiv E_0$ befindet sich das Teilchen im Grundzustand $|\psi_0\rangle$

$$\longrightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t}|\psi_0\rangle$$

$$\left.\begin{matrix}\langle E\rangle(t) = \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \\ \langle E^2\rangle(t) = \langle\psi_0|(\hat{H})^2|\psi_0\rangle = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2\end{matrix}\right\} \longrightarrow \Delta E \equiv 0$$

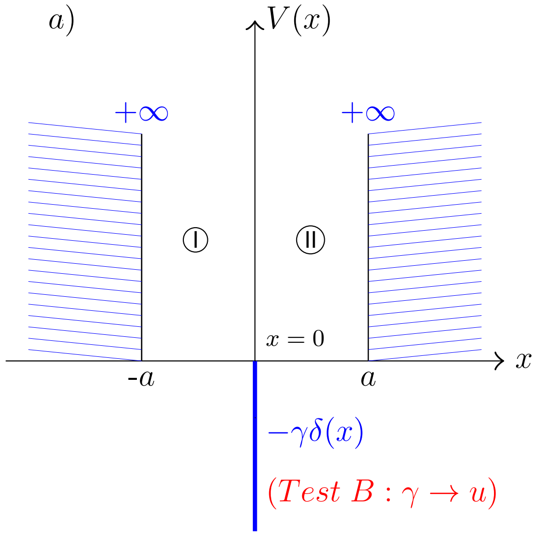
da sich das Teilchen in einem Energieeingenzustand befindet, (es gibt keine Energieschwankungen!)

$$\boxed{\begin{matrix}\Delta\hat{x}(t)\\ \Delta\hat{p}(t)\end{matrix}\cdot\Delta E \equiv 0}$$

Beispiel 2: Eindimensionales Potential

[Test B: δ - Potential Beispiel 4]

a)



Schrödingergl. & Rand/Anschlussbedingungen:

$\psi_E(x) = 0 \quad$ für $\quad |x| < a$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_E''(x) = E\,\psi_E(x) \qquad$ in Region I & II

Anschlussbedingungen bei $x = 0$:

$$\psi_E^{\text{I}}(0) = \psi_E^{\text{II}}(0)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi_E'^{\,\text{II}}(0^+) - \psi_E'^{\,\text{I}}(0^-)\right] = \gamma\,\psi_E(0)$$

$\big(Test\ B : \psi_E(x) \to \varphi(x)\big)$

b) Lösung für $E = 0$

Region I & II $\qquad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi_0''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0(x) = \begin{cases} \alpha_I\,x + \beta_I & \text{in I} \\ \alpha_{II}\,x + \beta_{II} & \text{in II} \end{cases}$

Rand/Anschlussbedingungen:

$\psi_{(0)}^{\text{I}}(x=-a) = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta_I = \alpha_I\,a \quad ; \quad \psi_0^{\text{II}}(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta_{II} = -\alpha_{II}\,a$

$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \longrightarrow \quad \alpha_I = -\alpha_{II} = \alpha \quad ; \quad d.h. \;\; \psi_0(x) = \begin{cases} \alpha\,(x+a) & \text{in I} \\ \alpha\,(a-x) & \text{in II} \end{cases}$

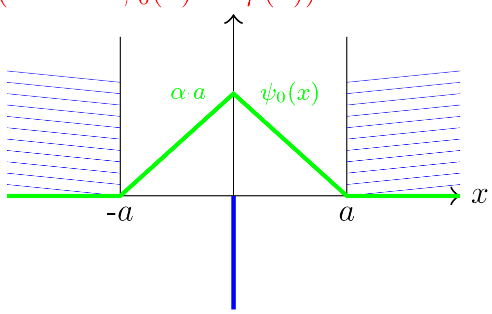
und wegen des $\delta-$Potentials:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\Big[-\alpha-\alpha\Big] = \gamma\,\psi(0) = \alpha\,\gamma\,a \quad \longrightarrow \quad \frac{\hbar^2}{m}\cancel{\alpha} = \cancel{\alpha}\,\gamma\,a \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{\hbar^2}{ma}$$

$Test\ B : \gamma \quad \longrightarrow \quad u$

Skizze von $\psi_0(x)$:

(Test B: $\psi_0(x) \to \varphi(x)$)



Da $\psi_0(x)$ ein gebundener Eigenzustand ist, der KEINE KNOTEN hat, muss er auch der Grundzustand des Systems sein.

B3 (bzw B1 für Test B) in B c $\longrightarrow$ z

a) c) $A = \Big(c\,|\psi\rangle\,\langle\psi|\Big)^{4\,3} = c^{4\,3}\,|\psi\rangle\,\langle\psi|$; $A^\dagger = c^{*4\,3}\,|\psi\rangle\,\langle\psi|$ sei $c = c_0 \cdot e^{i\varphi}$, $c_0 \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in \mathbb{R}$

i) $A^\dagger = A \ \rightarrow\ c^{*4\,3} = c^{4\,3} \ \rightarrow\ c_0^{4\,3} e^{-4\,3 i\varphi} = c_0{}^{4\,3} e^{4\,3 i\varphi}$

$$\longrightarrow\ {}^{6}_{8}\,\varphi = 2\pi n \qquad \varphi = \frac{\pi}{4\,3} n \qquad d.h. \qquad \varphi \in \begin{cases} \left\{0\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{4}\,,\ \pi\,,\ 1\frac{1}{4}\pi\,,\ 1\frac{1}{2}\pi\,,\ 1\frac{3}{4}\pi\right\} \\ \left\{0\,,\ \frac{\pi}{3}\,,\ \frac{2}{3}\pi\,,\ \pi\,,\ 1\frac{1}{3}\pi\,,\ 1\frac{2}{3}\pi\right\} \end{cases}$$

ii) $A^\dagger = -A \ \rightarrow\ c^{*4\,3} = -c^{4\,3}$

$$\rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{4\,3} \cdot (n + \frac{1}{3}) \quad \text{d.h.} \quad \varphi \in \begin{cases} \left\{\frac{\pi}{8}\,,\ \frac{3}{8}\pi\,,\ \frac{5}{8}\pi\,,\ \frac{7}{8}\pi\,,\ 1\frac{1}{8}\pi\,,\ 1\frac{3}{8}\pi\,,\ 1\frac{5}{8}\pi\,,\ 1\frac{7}{8}\pi\right\} \\ \left\{\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{3}{6}\pi\,,\ \frac{5}{6}\pi\,,\ 1\frac{1}{6}\pi\,,\ 1\frac{3}{6}\pi\,,\ 1\frac{5}{6}\pi\right\} \end{cases}$$

iii) $AA^\dagger = c^{4\,3}\,|\psi\rangle\,\langle\psi|\,c^{4\,3}\,|\psi\rangle\,\langle\psi| = |c|^{8\,6}\,|\psi\rangle\,\langle\psi| \neq \mathbb{1}$ nie unitär

iv) $A = c^{4\,3}\,|\psi\rangle\,\langle\psi|$ ist immer linear $\forall\ c \in \mathbb{C}$

v) $A^2 = c^{8\,6}\,|\psi\rangle\,\langle\psi|\,|\psi\rangle\,\langle\psi| = c^{8\,6}\,|\psi\rangle\,\langle\psi| \overset{!}{=} c^{4\,3}\,|\psi\rangle\,\langle\psi| = A$

$$\longrightarrow c^{4\,3} = 1 \qquad \longrightarrow \qquad c_0 = 1 \qquad \begin{cases} \varphi = \frac{\pi n}{2} & \varphi \in \left\{0\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi\,,\ \frac{3}{2}\pi\right\} \\ \varphi = \frac{2}{3}\pi n & \varphi \in \left\{0\,,\ \frac{2}{3}\pi\,,\ \frac{4}{3}\pi\right\} \end{cases}$$

oder $c = 0$

b) d)

$$\psi(x,0) = \int dp A\, \underbrace{e^{\frac{-d^2p^2}{\hbar^2}}}_{ⓐ} \cdot \underbrace{e^{i\frac{px}{\hbar}}}_{ⓑ}$$

A . . . Konstante

ⓐ . . . hat nach V_0 minimale Unschärfe bei $t = 0$

ⓑ . . . kompensiert Phasen der Entwicklung $t = 0 \rightarrow t_0$

$$\longrightarrow \psi(x, t_0) = \int dp A e^{-\frac{d^2}{\hbar^2}} \cdot e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

c) a)

$$i\hbar \frac{d}{dt}\mathcal{P}_H(t) = \big[\mathcal{P}_H, H\big] = U^\dagger \big[\mathcal{P}, H\big] U \overset{!}{=} 0 \qquad \text{für Erhaltungsgröße}$$

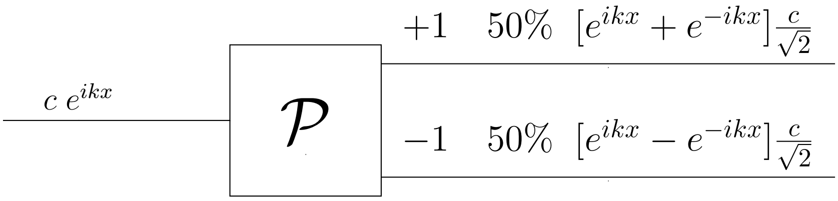
$$\big[\mathcal{P}, H\big] = \mathcal{P}\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{{\partial_x}^2} + V(x)\Big] - \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{{\partial_x}^2} + V(x)\Big]\mathcal{P} =$$

$$= \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{{\partial_{(-x)}}^2} + V(x)\Big]\mathcal{P} - \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{{\partial_x}^2} + V(x)\Big]\mathcal{P} \overset{!}{=} 0$$

$\longrightarrow V(x) = V(-x)$ ist die hinreichende und notwendige Bedingung.

d) b)

$$\psi(x) = c \cdot e^{ikx} = c \cdot \Big\{ \underbrace{\big[e^{ikx} + e^{-ikx}\big]}_{\text{EF zu } \mathcal{P} \text{ mit EW } +1} + \underbrace{\big[e^{ikx} - e^{-ikx}\big]}_{= -1} \Big\} \cdot \frac{1}{2}$$



Paritätsmessung

bei beiden kollabierten WFen liefert eine Impulsmessung mit 50 % Wahrscheinlichkeit den EW $\underbrace{+\hbar k}_{e^{ikx}}$ und $\underbrace{-\hbar k}_{e^{-ikx}}$ unabhängig vom Ergebnis der Paritätsmessung.