Musterlösung 2. Test QM 1 WS 2013

Beispiel 1) **Test B 4 und 1a)**

c)
Test B (a)

$$E_n = -\frac{Z^2\, m\, e^4}{2\,\hbar^2}\,\frac{1}{n^2} \qquad \begin{cases} \text{mit } Z = 2 \text{ für He}^+ \\ \text{und } Z = 3 \text{ für } Li^{2+} \end{cases} \qquad \text{und } 1Ry = \begin{cases} \frac{m\,e^4}{2\,\hbar^2} \\ 13.6eV \end{cases}$$

$$\Delta E = E_{fin} - E_{in} = E_{n=2} - E_{n=1} = -Z^2 \cdot (1\ Ry) \cdot \Big(\frac{1}{4} - 1\Big) = \frac{3\,Z^2}{4} Ry$$

$$\Delta E = 3\ Ry \qquad\qquad \Delta E = \frac{27}{4}\ Ry \qquad\qquad \text{mit } 1Ry = 13.6eV$$

e)
Test B (d)

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2\,I} + gBL_x \qquad\qquad \text{Test B: } L_x \to L_y$$

i) H ist **drehinvariant**, wenn $\big[H, L_x\big] = \big[H, L_y\big] = \big[H, L_z\big] = 0$

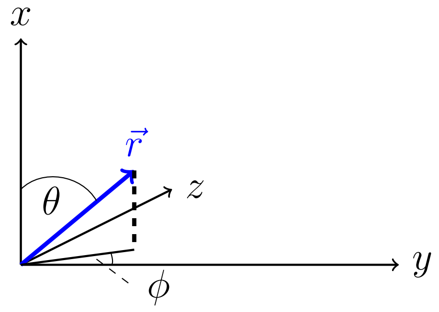
$\Longleftrightarrow \forall\ I\ ; B = 0$

ii) $\big[H, L^2\big] = 0$ **und** $\big[H, \begin{smallmatrix} L_x \\ L_y \end{smallmatrix}\big] = 0 \Longrightarrow$ gemeinsame Eigenbasis $\Big\{H, L^2, \begin{smallmatrix} L_x \\ L_y \end{smallmatrix}\Big\}$

$$\begin{cases} L^2\,|l,m\rangle = \hbar^2\ l(l+1)\,\underbrace{|l,m\rangle}_{EV} \\ \begin{smallmatrix} L_x \\ L_y \end{smallmatrix}\,|l,m\rangle = \hbar\,|l,m\rangle \end{cases} \Longrightarrow \quad m = \text{ Quantenzahl der } L_x (L_y) \text{ Komponente von } \vec{L}$$

$$H\,|l,m\rangle = \left(\frac{\hbar^2\ l(l+1)}{2\ I} + gB\hbar m\right)|l,m\rangle \qquad mit \qquad \begin{matrix} l = 0, 1,\ \dots \\ m = -l,\ \dots\ , l \end{matrix}$$

iii) $\langle \vec{r}\ |\ l, m\rangle = Y_{lm}(\theta, \phi)$ aber θ ist der Winkel zu der $\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$ - Achse



bzw. entsprechend um die y-Achse

Beispiel A1) bzw. B4) und B 1a)

a) 4b $\underbrace{\langle nlm|}_{R_{nl}Y_{lm}(\theta,\phi)} \overset{r^{k+1}}{r+r^{\beta}} \underbrace{|n'l'm'\rangle}_{R_{n'l'}Y_{l'm'}(\theta,\phi)} = 0$

nur für $l \neq l'$ oder $m \neq m'$ da dann

$Y_{lm} \perp Y_{l'm'}$ (die r-Integration ist i.A.

d.h. die meisten $\overset{\beta}{k} \neq 0$)

b) 4c $\mathcal{P}\,|nlm\rangle = (-1)^l \;|nlm\rangle$

$\mathcal{P}Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$

und $\mathcal{P}R_{nl}(r) = R_{nl}(r)$

d) 1a (i) Störterm: $\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i(1) \\ i(1) & 0 \end{pmatrix}}_{|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle}$ wird im entarteten Unterraum diagonal für:

$$|a\rangle = \overset{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle} \qquad \text{und} \qquad |b\rangle = \overset{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle}$$

Energie in Störungstheorie 1. Ordnung:

$$E_a^{(1)} = \varepsilon_0 + \lambda \qquad E_b^{(1)} = \varepsilon_0 - \lambda$$

(ii) Da $|a\rangle$ und $|b\rangle$ bereits EF zu $\varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \lambda V$ ist (i) gleichzeitig die exakte Lösung; es gibt keine Korrekturen in 2. Ordnung.

Beispiel A4) bzw. B2)

a) Der Produktraum ist 4-dimensional mit $|\uparrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle\,, |\uparrow_1\rangle\,|\downarrow_2\rangle\,, |\downarrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle\,, |\downarrow_1\rangle\,|\downarrow_2\rangle\,,$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\eta}{2}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\frac{\eta}{2}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EF und EW

$EW\ 0: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle \quad$ und $\quad |\downarrow_1\rangle\,|\downarrow_2\rangle$

$$\underbrace{-\frac{\eta}{2}\hbar^2(\alpha\hbar^2)}_{EW} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{EF} = \frac{|\uparrow_1\rangle\,|\downarrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle}{\sqrt{2}} \quad =: \quad \begin{matrix} |a\rangle \\ |b\rangle \end{matrix}$$

b) Nach Messung $\frac{\hbar}{2}$ mit $\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{+}$: $\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{+}\frac{\hbar}{2}$ Zustand $|\downarrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle$ da EF zu $(S_z)_1(S_z)_2$ mit EW $\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{+}\frac{\hbar}{2}$

c) Mit 100 % Wahrscheinlichkeit erhält man $\genfrac{}{}{0pt}{}{+}{-}\frac{\hbar}{2}$ WF bleibt $|\downarrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle$

d) $|\psi(0)\rangle = |\downarrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,|b\rangle - |a\rangle\,\Big]$ zu $t = 0$ $\qquad |a\rangle\,, |b\rangle \ldots$ bereits EF zu H

Zeitentwicklung: $|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[e^{-i\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{+\alpha}{-\frac{\eta}{2}}\right)t\frac{\hbar^2}{\hbar}}\,|b\rangle + e^{-i\genfrac{}{}{0pt}{}{-\alpha}{\frac{\eta}{2}}t\frac{\hbar^2}{\hbar}}\,|a\rangle\Big] =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg[e^{i\hbar t\frac{\eta}{2}}\,\frac{\Big[|\uparrow_1\rangle\,|\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle\,|\uparrow_2\rangle\,\Big]}{\sqrt{2}} - e^{-i\hbar t\frac{\eta}{2}}\,\frac{\Big[\,|\downarrow_1\rangle\;\;|\uparrow_2\rangle\;+|\uparrow_1\rangle\,|\downarrow_2\rangle\Big]}{\sqrt{2}}\Bigg]$$

$-\frac{\hbar}{2} \qquad +\frac{\hbar}{2} \qquad -\frac{\hbar}{2} \qquad +\frac{\hbar}{2}$

Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{2}\Big|e^{i\frac{\eta}{2}t\frac{\hbar^2}{\hbar}} + e^{-i\frac{\eta}{2}\frac{\hbar^2}{\hbar}t}\Big|^2 = cos^2\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{\frac{\eta}{2}}\hbar t\right)$

Störungstheorie Musterlösung A 3) bzw. B (i)

$$\alpha\frac{2}{\hbar}\big(px+c\big)=\alpha\frac{2}{\hbar}\Big[\frac{x_0\hbar i}{\sqrt{2}\sqrt{2}x_0}\big(a^\dagger-a\big)\big(a^\dagger+a\big)+c\Big]=$$

$$=i\alpha\Big[a^\dagger a^\dagger-aa^\dagger+a^\dagger a-aa-i\frac{2}{\hbar}c\Big]=i\alpha\Big[a^\dagger a^\dagger-aa-1-i\frac{2}{\hbar}c\Big]$$

$$\big(\dots\big)^\dagger=-i\alpha\Big[aa-a^\dagger a^\dagger-1+i\frac{2}{\hbar}c^*\Big]=i\alpha\Big[a^\dagger a^\dagger-aa+1-i\frac{2}{\hbar}c^*\Big]$$

$$\big(\dots\big)-\big(\dots\big)^\dagger=i\alpha\Big[-2-i\frac{2}{\hbar}\big(c-c^*\big)\Big]\overset{!}{=}0\Rightarrow-\frac{i}{\hbar}\big(c-c^*\big)=1$$

$$\Rightarrow 2\ Im(c)=\hbar\quad\xRightarrow{\text{Realteil bekannt}}\quad c=i\frac{\hbar}{2}$$

$$H_1=i\alpha\Big(a^\dagger a^\dagger-aa\Big)$$

b) (i) $E_n^{(1)}=\langle n^{(0)}|\,H_1\,|n^{(0)}\rangle=0$

(ii) $E_n^{(2)}=\sum\limits_{m\neq n}\frac{|\langle m^{(0)}|H_1|n^{(0)}\rangle|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_m}=\left|\begin{array}{c}\text{nur } m=n\pm2\\ \text{tragen bei}\end{array}\right|=\alpha^2\Big[\frac{(n+1)(n+2)}{-2\hbar\omega}+\frac{(n-1)n}{2\hbar\omega^2}\Big]=$

$=-\frac{\alpha^2}{\hbar\omega}\big(2n+1\big)$

$E^{(\leq2)}=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}+E_n^{(2)}$ mit $E_n^{(0)}=\hbar\omega\big(n+\frac{1}{2}\big)$

c) $|n^{(1)}\rangle=\sum\limits_{m\neq n}|m^{(0)}\rangle\,\frac{\langle m^{(0)}H_1|n^{(0)}\rangle|}{\varepsilon_n-\varepsilon_m}=$

$=\frac{i\alpha}{2\hbar\omega}\Big[\sqrt{n}\sqrt{n-1}\,|n-2^{(0)}\rangle-\sqrt{n-1}\sqrt{n+2}\,|n+2^{(0)}\rangle\Big]$

$|n^{(\leq2)}\rangle=|n^{(0)}\rangle+|n^{(1)}\rangle+|n^{(2)}\rangle$ mit $|n^{(0)}\rangle$ E.F. des H.O.

B a) siehe Theorieteil A

b) (i) A a) mit c $=-i\frac{\hbar}{2}$

(ii) A b)

(iii) A c)

Beisp. 2) Test B 3)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right] = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

a) $H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \xrightarrow{Kugelkoord.} \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}\Big]\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi)$

Separationsansatz: $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$

$Y_{lm}(\theta,\phi)\ldots$ Lösung des Winkelanteils Kugelflächenfunkt. mit $l = 0, 1, \ldots$ und $m = -l, \ldots, l$

$$\Rightarrow \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{2mr^2}\Big]R_{o,l}(r)\cancel{Y_{l,m}(\theta,\phi)} = ER_{o,l}(r)\cancel{Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

b) Radialer Anteil mit $l = 0$

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big]R_{o,0}(r) = E\underbrace{R_{o,0}(r)}_{=\frac{u(r)}{r}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r) = Eu(r) \qquad \text{mit } u(0) = 0, E > 0 \text{ (freies Teilchen)}$$

$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} = -\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{\kappa^2>0}u(r)\begin{cases}\text{allg. Lös.: } u(r) = Asin(\kappa r) + Bcos(\kappa r)\\ \text{Randbedingung } (u(0) = 0) \Rightarrow B = 0\end{cases}$$

c)

$$R_{o,l=0}(r) = R_{\kappa,0}(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{sin(\kappa r)}{r} \qquad \text{mit } \kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$R_{\kappa,0}(r) = \frac{sin(\kappa r)}{r} \propto \underbrace{\frac{e^{i\kappa r}}{r}}_{\substack{\text{Auslaufende}\\ \text{Kugelwelle}}} - \underbrace{\frac{e^{-i\kappa r}}{r}}_{\substack{\text{Einlaufende}\\ \text{Kugelwelle}}} \Rightarrow \text{stehende Kugelwelle}$$

d) $r \to \infty \Rightarrow \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$ vernachlässigbar

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big]R_{o,l}(r) = ER_{o,l}(r) \overset{\text{Form wie in b)}}{\Rightarrow} R_{\kappa,l}(r) = A\frac{sin(\kappa r)}{r} + B\frac{cos(\kappa r)}{r}$$