Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Prof. Dr. A. Toschi,
Dr. J. Tomczak, Dr. G. Rohringer, DI T. Schäfer

2. Test zur Quantentheorie I

Wintersemester 2013/2014

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
14+3*	11+3*	13	12	50+6*

1. Verständnisfragen

3 +2+3+5+4=14+3* Punkte*

a) Für welche Eigenfunktionen $|nlm\rangle$ und $|n'l'm'\rangle$ des Wasserstoff-Problems ist $\langle nlm|\,(|\vec{r}| + \beta|\vec{r}|^2)\,|n'l'm'\rangle = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$?

b) Welche Wellenfunktion erhält man bei der Anwendung des Paritätsoperators $\mathcal{P}$ auf die Eigenfunktionen $|nlm\rangle$ des Wasserstoffproblems? (d.h. $\mathcal{P}|nlm\rangle$ =?)

c) Welche Energie (in eV oder Rydberg) muss man aufbringen, um ein He^+-Ion vom Grundzustand in den 1. angeregten Zustand zu bringen?

d) Gegeben sei als ungestörter Hamiltonian ein Zwei-Niveau System, $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$, mit entarteter Energie ϵ_0. Jetzt wird der Störterm $\lambda\,[i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|]$ eingeschaltet.
(i) Wie lauten die Eigenenergien und -funktionen mit Korrekturen bis zur 1. Ordung in λ?
(ii) Welche Korrekturen ergeben sich in 2. Ordnung Störungstheorie in λ?

e) Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = \frac{\vec{L}^2}{2I} + gBL_x$, wobei $\vec{L}$ der Bahndrehimpulsoperator, und $I, g > 0$ sowie $B \geq 0$ reelle Konstanten sind.
(i) Für welche Werte von I und B ist H drehinvariant?
(ii) Geben Sie die Eigenwerte und -vektoren von H (in Dirac-Notation mit kurzer Erklärung der gewählten Quantenzahlen) für beliebige Werte von I, g und B an.
(iii) Welches sind die Eigenfunktionen von H in Ortsraumdarstellung?

2. Freies Teilchen in Kugelkoordinaten

3+5+3 +3=11+3* Punkte*

Betrachten Sie ein freies Teilchen in drei Dimensionen. Der Hamiltonoperator in kartesischen Koordinaten lautet:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right].$$

a) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung dieses Teilchens in Kugelkoordinaten an und machen Sie einen Separationsansatz. Geben Sie die Lösung für den Winkelanteil der Schrödingergleichung an.

b) Lösen Sie den radialen Anteil der Schödinger-Gleichung in dem Unterraum mit Drehimpulsquantenzahl $l = 0$. Geben Sie explizit die Eigenwerte und die Eigenfunktionen an.

c) Wie kann man die Eigenfunktionen von **b)** interpretieren?

d) Bestimmen Sie die asymptotische Lösung der Schödinger-Glg. für $r \to \infty$ und beliebiges l.

3. Störungstheorie des harmonischen Oszillators

3+6+4=13 Punkte

Gegeben sei der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators H_0, der durch H_1 gestört wird (i: imaginäre Einheit, $c \in \mathbb{C}$; $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} H &= \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2}_{H_0} + \underbrace{\alpha \frac{2}{\hbar}(px + c)}_{H_1} && (1) \\ &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + i\alpha \left(a^\dagger a^\dagger - aa\right). && (2) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass der Störterm in Glg. (1) für eine spezielle Wahl von c hermitesch ist und auf die Form Glg. (2) gebracht werden kann. Wie lautet die Konstante c?

b) *(kann auch ohne* **a)** *gerechnet werden)* Wie lauten die durch den Störterm H_1 gegebenen Energiekorrekturen in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie? Geben Sie auch die korrigierte Gesamt-Energie von H bis zur 2. Ordnung in α an.

c) Wie lauten die durch den Störanteil H_1 gegebenen Korrekturen der Eigenzustände des ungestörten harmonischen Oszillators in erster Ordnung Störungstheorie? Geben Sie auch die korrigierte Gesamt-Wellenfunktion (in Dirac-Notation) bis zur 1. Ordnung explizit an.

4. XY-Modell

4+2+2+4=12 Punkte

Wir betrachten zwei lokalisierte Spins, $|\sigma_1\rangle \in \{|\uparrow_1\rangle, |\downarrow_1\rangle\}$, $|\sigma_2\rangle \in \{|\uparrow_2\rangle, |\downarrow_2\rangle\}$, mit folgender Wechselwirkung

$$H = -\eta \left[(S_x)_1 \otimes (S_x)_2 + (S_y)_1 \otimes (S_y)_2\right] = -(\eta/2)\left[(S_+)_1 \otimes (S_-)_2 + (S_-)_1 \otimes (S_+)_2\right] .$$

Hierbei bezieht sich $(\cdots)_1$ auf den 1. Spin und $(\cdots)_2$ auf den 2. Spin.

a) Betrachten Sie den Hamilton-Operator im Raum der Produktzustände $|\sigma_1\rangle \otimes |\sigma_2\rangle$ *(wie groß ist dieser Raum?)* und geben Sie die Eigenenergien und -funktionen an.

b) Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $\left[|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle\right]/\sqrt{2}$. Es wird bei $t = 0$ eine Messung $(S_z)_1$ des 1. Spins durchgeführt mit Messergebnis $-\hbar/2$. Welche Wellenfunktion liegt nach der Messung vor?

c) Unmittelbar nach der Messung bei **b)** wird eine Messung $(S_z)_2$ des 2. Spins durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man welches Messergebnis? Welche Wellenfunktion liegt nach der Messung vor?

d) Wie ändert sich das Ergebnis bei **c)** wenn die Messung $(S_z)_2$ des 2. Spins erst nach der Zeit $t = \tau$ durchgeführt wird?

Hinweis: Für allgemeine Drehimpulse gilt $J_\pm|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|jm \pm 1\rangle$

Viel Erfolg!