
2. Plenum zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

PLENUM: Mittwoch, 30.10.2013.

In der Vorlesung wurden die *stationären* Zustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators berechnet. Hier wollen wir uns nun mit der Zeitentwicklung einer Superposition beschäftigen.

1. Harmonischer Oszillator: Zeitentwicklung von Superpositionen

Wir betrachten ein Teilchen in einem harmonischen Oszillator dessen Wellenfunktion bei $t = 0$ durch den Mischzustand

$$\psi(x, t = 0) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) \quad (1)$$

beschrieben wird, wobei $\psi_n(x)$ den n -ten angeregten Zustand bezeichnet, und wir $c_n \in \mathbb{C}$ annehmen.

- Wir normieren $\psi(x, t = 0)$ und diskutieren die Form von ψ für $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$.
- Wir bestimmen nun die Zeitentwicklung des Zustands $\psi(x, t)$, sowie die der Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi(x, t)|^2$. Was ist die physikalische Interpretation des Zeitverhaltens?
- Wir bestimmen die zeitabhängigen Erwartungswerte
 - $\langle x \rangle (t) = (\psi(x, t), x\psi(x, t))$
 - $\langle p \rangle (t) = (\psi(x, t), p\psi(x, t))$
 - $\langle x^2 \rangle (t) = (\psi(x, t), x^2\psi(x, t))$.

Was ergibt sich für die zeitabhängige "Ortsunschärfe" $(\Delta x)^2(t) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$?

2. Vergleich mit den Bewegungsgleichungen eines klassischen Oszillators

Für ein klassisches Teilchen, beschrieben durch den Hamiltonian $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, gelten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (2)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (3)$$

Hier motivieren wir, dass im Falle des harmonischen Oszillators eine Korrespondenz besteht zwischen dem Verhalten der klassischen Koordinate x und des Impulses p und den quantenmechanischen Erwartungswerten der Orts- und Impulsoperatoren. Dazu schauen wir uns die Bewegungsgleichungen der Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ für den Spezialfall eines Oszillators mit dem Anfangszustand $\psi(x, t = 0)$ aus Gleichung (1) an.

Dies ist ein Spezialfall des sogenannten Ehrenfestschen Theorem, welches besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die quantenmechanischen Erwartungswerte den klassischen Bewegungsgleichungen genügen. Das Ehrenfestsche Theorem wird eingehender in Kapitel 4 der Vorlesung behandelt.