Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Prof. Dr. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dipl.-Ing. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

2. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

TUTORIUM: Freitag, 18.10.2013.

3. Teilchen in der Box

2+1+1+1=5 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Beschreibung eines freien Teilchens als ebene Welle bzw. Superposition mehrerer ebenen Wellen in Form einer Wellenfunktion kennen gelernt. Beschränkt man den Raum, in welchem sich das Teilchen frei bewegen kann, so ergeben sich Randbedingungen, die die Menge der gültigen Wellenfunktionen einschränken und oft (bei gebundenen Zuständen) das mögliche Energiespektrum quantisieren.

Betrachten Sie ein "freies" Teilchen, das sich in einer Dimension bewegen kann, und in einer Box der Länge L eingesperrt ist, d.h. es gilt $\psi(x) = 0$ außerhalb der Box. Dies kann man durch eine (stationäre) Schrödingergleichung mit unendlich großem Potential mathematisch beschreiben:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi = E\psi \tag{1}$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie lauten die (normierten) Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und die zugehörigen Eigenenergien E_n? Lösen Sie hierfür die Schrödingergleichung dieses Problems unter den oben aufgestellten Randbedingungen.

Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch eine Superposition der ersten zwei Zustände (Grundzustand und erstem angeregten Zustand)

$$\Phi(x, t = 0) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$$

gegeben.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Orts $\langle x\rangle$ des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses $\langle p\rangle$ des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$.

d) Wie sieht die Zeitentwicklung $\Psi_n(x, t)$ für die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des obigen Problems bzw. im Detail für den angegebenen Zustand $\Phi(x, t)$ aus?

4. Dispersion eines Wellenpakets

1+1+1+2=5 Punkte

Ein freies Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die (normierte) Wellenfunktion durch ein Gaußsches Wellenpaket

$$\Psi(x, t = 0; \sigma_x^2) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}} \tag{2}$$

gegeben. Dabei ist $\sigma_x^2 = \left\langle x^2 \right\rangle$ ein Maß für die Breite des Wellenpakets im Ortsraum (i.e. Ortsunschärfe).

a) Wie groß ist die Impulsunschärfe $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ des Wellenpakets zum Zeitpunkt $t = 0$?

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Teilchens zum Zeitpunkt $t > 0$ folgende Form annimmt (die Punkte i) bis iii) können einzeln gekreuzt werden):

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left|\Psi(x, t = 0; \sigma_x^2 + \sigma_p^2 \frac{t^2}{m^2})\right|^2$$

i) Stellen Sie dazu $\Psi(x, t = 0; \sigma_x^2)$ zunächst als Superposition von ebenen Wellen (zum Zeitpunkt $t = 0$) dar (Fouriertransformation).

ii) Geben Sie nun $\Psi(x, t; \sigma_x^2)$ als Superposition von zeitabhängigen ebene Wellen an. Beachten Sie, dass die Dispersionsrelation für ein freies Teilchen durch $E = \frac{p^2}{2m}$ gegeben ist.

iii) Berechnen Sie schließlich $|\Psi(x, t)|^2$ um das oben angegebene Ergebnis zu erhalten. Wie kann man dieses mittels der Heisenbergschen Unschärferelation interpretieren?