Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Prof. Dr. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dipl.-Ing. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

3. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

TUTORIUM: Freitag, 25.10.2013.

5. Teilchen in der Box - Teil II

1+1+1+1=4 Punkte

In der letzten Übung haben Sie unter Verwendung der Schrödingergleichung für das unendlich hohe Kastenpotential

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi = E\psi \tag{1}$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

die Eigenzustände $\psi_n(x)$ und Eigenenergien E_n bestimmt. Gegeben sei nun folgender Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ (bitte beachten Sie die leicht abweichende Definition im Vergleich zur vorigen Übung):

$$\Phi(x, t = 0) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + i\psi_2(x)\right)$$

a) Schreiben Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort x zu einem beliebigen Zeitpunkt t an. Drücken Sie das Ergebnis über die Frequenz $\omega = \frac{\pi^2\hbar}{2mL^2}$ aus.

b) Wie lautet der Ortserwartungswert $\langle x(t)\rangle$ des Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt t? Ist dieser eine Konstante oder oszilliert er mit der Zeit? Falls Letzteres zutrifft, wie groß ist die Amplitude und Frequenz der Oszillation? Vergleichen Sie die Amplitude mit derjenigen eines klassischen Teilchens.

c) Wie lautet der Impulserwartungswert $\langle p(t)\rangle$ des Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt t? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

d) Wie lautet der Energieerwartungswert $\langle E(t)\rangle$ des Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt t? Begründen Sie physikalisch dessen Zeitabhängigkeit.

6. Streuung an Barriere und Deltapotential *2+1+1+1.5+0.5=6 Punkte*

Im Plenum haben Sie die gebundenen Zustände des endlichen Potentialtopfs kennen gelernt. Invertiert man die Tiefe des Topfes (und "dreht" ihn damit sozusagen um) erhält man eine Potentialbarriere. Der zugehörige Schrödingergleichung für das stationäre Problem lautet:

$$H\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2},\ V_0 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die Streuung eines Teilchens mit Energie $0 < E < V_0$ an der Potentialbarriere. Welche Relation erfüllen Reflexions- und Transmissionskoeffizient miteinander?

b) Zeigen Sie, dass man den Transmissionskoeffizienten des obigen Streuproblems auf folgende Form bringen kann:

$$T = \frac{4\kappa^2}{k^2}\frac{1}{\sinh^2(\kappa L)(1-\frac{\kappa^2}{k^2})^2 + 4\cosh^2(\kappa L)\frac{\kappa^2}{k^2}} \tag{2}$$

mit

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \qquad \text{und} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Das Potential, das Nukleonen aufgrund der schwachen Wechselwirkung im Atomkern spüren, lässt sich in grober Näherung als Deltapotential (extrem kurzreichweitige Wechselwirkung) schreiben. Die zugehörige stationäre Schrödingergleichung für dieses Problem lautet

$$H\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

c) Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung der Wellenfunktion am Ort des Deltapotentials $x = 0$ folgende Anschlussbedingung gilt:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

Wie lautet die Anschlussbedingung für die Wellenfunktion selbst?

d) Wie lauten die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die Streuung eines Teilchens mit Energie $E > 0$ am Deltapotential? Was passiert mit ihnen für sehr hohe bzw. sehr niedrige Anfangsenergien E?

e) Lassen Sie nun die Breite L der endlich hohen Potentialbarriere aus Punkt a) gegen null gehen, während Sie gleichzeitig deren Höhe V_0 unendlich groß machen. Das Produkt V_0L soll dabei konstant bleiben. Zeigen Sie, dass Sie damit dieselben Reflexions- und Transmissionskoeffizienten wie für das Deltapotential erhalten. Wie lautet das korrespondierende α?