Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Prof. Dr. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dipl.-Ing. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

5. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

<u>**TUTORIUM**</u>**: Freitag, 22.11.2013**.

10. Operatoren in Bra-Ket-Schreibweise *0.5+0.5+1+0.5+1+0.5=4 Punkte*

Ein dreidimensionaler Vektorraum werde durch drei orthonormierte Basiszustände $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ aufgespannt. Ein betrachtetes physikalisches System befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = 3|1\rangle - 2i|2\rangle + \sqrt{3}|3\rangle.$$

a) Normieren Sie $|\psi\rangle$ und geben Sie zwei zu $|\psi\rangle$ orthonormale Zustände an.

b) Der Hamiltonoperator des Systems sei durch

$$\hat{H} = \hbar\omega|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega|2\rangle\langle 2| + \hbar\omega|3\rangle\langle 3| - i\hbar\omega|1\rangle\langle 3| + i\hbar\omega|3\rangle\langle 1|$$

mit $\omega \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Geben Sie dessen Matrixdarstellung in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ an. Ist der Operator hermitesch? Ist er unitär?

c) Berechnen Sie den Energieerwartungswert $E = \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ des Zustands $|\psi\rangle$.

d) Geben Sie die unitäre Transformation U in Dirac Notation an, die von der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ in die Eigenbasis von $\hat{H}$ transformiert.

e) Entwickeln Sie $|\psi\rangle$ in der Basis der Eigenfunktionen von $\hat{H}$.

f*) Welche möglichen Messwerte können Sie bei einer Messung der Energie für das obige System erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Messung für jede einzelne dieser Möglichkeiten?[1]

[1] Der Messprozess wird in einer Vorlesung vor dem Tutorium noch besprochen.

11. Schrödingergleichung im Impulsraum *1+2+1=4 Punkte*

a) Das Potential für ein physikalisches System sei in der Ortsbasis durch

$$V(x) = x^n \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass sich die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Potential, ausgehend von der basisunabhängigen Notation, in der Impulsbasis als

$$\left[\frac{p^2}{2m} + (i\hbar)^n \frac{d^n}{dp^n}\right] \psi(p) = E\psi(p)$$

schreiben lässt.

b) Lösen Sie die Schrödingergleichung in Impulsdarstellung für das Potential $V(x) = \gamma x$ mit $\gamma > 0$.

c) Normieren Sie die Lösungen $\psi_E(p)$ der zeitunabhängigen Schrödingergleichung zur Energie E gemäß

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \psi_E^*(p)\psi_{E'}(p) = \delta(E - E').$$

Anmerkung: Transformiert man die Lösungen vom Impulsraum zurück in den Ortsraum, ergibt sich die Form

$$\psi_E(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi\gamma}} Ai\left[-\alpha\left(x + \frac{E}{\gamma}\right)\right]$$

wobei Ai die Airy-Funktion darstellt.

12. Hermitizität, Zeitentwicklungsoperator *1+1=2 Punkte*

a) Welche der folgenden Operatoren sind hermitesch bzw. unitär, falls $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $|\psi\rangle$ Eigenfunktion zu $\hat{A}$ sind?

- $e^{\lambda\hat{A}}$
- $e^{i\lambda\hat{A}}$
- $i|\psi\rangle\langle\psi|$
- $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
- $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

b) Stellen Sie den Zeitentwicklungsoperator

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

allgemein in der Eigenbasis von $\hat{H}$ dar. Ein Zustand $|\psi\rangle$ des Systems sei durch eine Linearkombination dreier Eigenfunktionen von $\hat{H}$ mit $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ gegeben:

$$|\psi\rangle = |0\rangle + i|1\rangle - 2|2\rangle.$$

Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands (also $\hat{U}(t)|\psi\rangle$) explizit.