Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Prof. Dr. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dipl.-Ing. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

6. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

TUTORIUM: Freitag, 06.12.2013.

13. Messprozess und Zeitentwicklung

2+2+1+1=6 Punkte

Gegeben sei ein quantenmechanisches, fixiertes Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ im äußeren, in die x-Richtung zeigendem magnetischem Feld. Der Hamiltonoperator, der die Wechselwirkung des magnetischen Moments mit dem Feld beschreibt sei durch

$$\hat{H} = -g(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \tag{1}$$

gegeben. Wir werden Messungen von S_x und S_y durchführen und definieren uns daher, analog zum 3. Plenum, folgende hermitesche Operatoren:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}(-i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \tag{2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Zustand

$$|\Psi(t = 0)\rangle = |\psi\rangle = |\uparrow\rangle$$

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird S_y gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Messergebnis? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\hat{S}_y|\psi\rangle$.

b) Nach der Messung von S_y zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Observable S_y gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte für diese Messung und berechnen Sie die absoluten und bedingten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Messergebnis bei a).

c) In einem zweiten Versuchsaufbau wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Energie gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für die jeweilige Messung?

d) Nach der Messung der Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Energie gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte für diese Messung und berechnen Sie die absoluten und bedingten Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte in Abhängigkeit von c). Was fällt Ihnen auf?

14. Verschränkte Zustände und Korrelationen *1.5+1+1+0.5=4 Punkte*

Wir betrachten ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Das System befinde sich in einem der beiden Zustände

$$|\uparrow\uparrow\rangle := |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \tag{3}$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle) \tag{4}$$

Hierbei bezeichnet der Index $i = 1, 2$ das jeweilige Teilchen. Will man nun die Spineinstellung des ersten bzw. zweiten Teilchens messen, so definiert man sich folgende Operatoren als Tensorprodukte[1]:

$$\hat{S}_{z,1} = (\hat{S}_z)_1 \otimes (\mathbb{1})_2 \quad \text{bzw.} \quad \hat{S}_{z,2} = (\mathbb{1})_1 \otimes (\hat{S}_z)_2 \tag{5}$$

wobei $(...)_{1(2)}$ die Wirkung auf Teilchen 1 (2) beschreibt. Zur Messung der Korrelation definiert man den Operator

$$\hat{C} = (\hat{S}_z)_1 \otimes (\hat{S}_z)_2 \tag{6}$$

a) Stellen Sie die Zustände $|\uparrow\uparrow\rangle$ und $|\uparrow\downarrow\rangle$ als 4×1-Vektoren und die Operatoren $\hat{S}_{z,1}$, $\hat{S}_{z,2}$ und $\hat{C}$ als 4×4-Matrizen mittels der Basis

$$B = \{|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle, |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle, |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle, |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\}$$

dar.

b) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte für den Zustand $|\uparrow\uparrow\rangle$: $\langle S_{z,1}\rangle$, $\langle S_{z,2}\rangle$, $\langle C\rangle$.

c) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte für den Zustand $|\uparrow\downarrow\rangle$: $\langle S_{z,1}\rangle$, $\langle S_{z,2}\rangle$, $\langle C\rangle$.

d) Geben Sie für beide Zustände den Wert der Korrelationsfunktion

$$G(S_{z,1}, S_{z,2}) = \langle S_{z,1}S_{z,2}\rangle - \langle S_{z,1}\rangle\langle S_{z,2}\rangle$$

an. Welcher der beiden obigen Zustände ist korreliert (verschränkt)? Warum?

[1] Für die Definition von $\hat{S}_z$ siehe vorangegangenes Beispiel.