Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Prof. Dr. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dipl.-Ing. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

10. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2013/2014

TUTORIUM: Freitag, 17.01.2014

21. Eindimensionaler harmonischer Oszillator *1+1.5+1.5+1=5 Punkte*

Gegeben ist ein eindimensionaler harmonischer Oszillator:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Der Hamiltonoperator sei durch den zusätzlichen Beitrag $\alpha\hat{x}^2$ gestört.

a) Geben Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}_0 + \alpha\hat{x}^2$ exakt an.

b) Berechnen Sie in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie die Energiekorrekturen von $\alpha\hat{x}^2$ auf das Spektrum von $\hat{H}_0$.

c) Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Korrekturen zu den Eigenfunktionen von $\hat{H}_0$.

d) Sind die Ergebnisse aus **b)** sinnvoll? Warum?

22. Jaynes-Cummings Modell *1.5+2+1.5=5 Punkte*

Das Jaynes-Cummings Modell ist eines der einfachsten Modelle für die Beschreibung der Wechselwirkung eines Elektrons in einem Atom mit einem quantisierten Strahlungsfeld. In der Festkörperphysik werden ähnliche Modelle zur Modellierung der Elektron-Phonon Wechselwirkung verwendet. Die Photonen (bzw. die Phononen) werden in diesem Modell durch einen eindimensionalen harmonischen Oszillator dargestellt, während das Elektron nur zwei mögliche Zustände $|g\rangle$ (Grundzustand) und $|e\rangle$ (angeregter Zustand) einnehmen kann (Zwei-Niveau-Atom, $B = \{|g\rangle, |e\rangle\}$ ist eine Orthonormalbasis). Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems hat folgende Gestalt:

$$\hat{H} = \underbrace{\varepsilon|e\rangle\langle e| + \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}_{\hat{H}_0} + \underbrace{d\left(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\right)\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)}_{\hat{H}_I},$$

wobei $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind.

a) Geben Sie für $d = 0$, d.h. für $\hat{H}_0$, die Energieeigenwerte und die entsprechenden Energieeigenzustände an. *(Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Basis $|i, n\rangle = |i\rangle \otimes |n\rangle$ mit $i = e, g$ (atomarer Zustand) und $n = 0 \ldots \infty$ (Besetzung des Oszillators)).*

b) Berechnen Sie für $0 < \varepsilon < \frac{\hbar\omega}{2}$ die Energiekorrekturen in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie.

c) Berechnen Sie für $\varepsilon = \hbar\omega$ die Energiekorrekturen für die Zustände $|g, 1\rangle$ und $|e, 0\rangle$ in erster Ordnung entarteter Störungstheorie (wird am Montag in der Vorlesung besprochen).