1. Prüfung VU Quantentheorie I, 28.11.2014

1. **(13 Punkte)** Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, der durch folgenden dimensionslosen Hamiltonoperator beschrieben wird,

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2\right),$$

wobei y über die Ortsvariable x definiert ist: $y = x/x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

   a) Zeigen Sie explizit, wie Sie ausgehend von einem passend gewählten Ansatz zu einer Rekursionsformel für die analytische Lösung der Differentialgleichung $\bar{H}\bar{\psi} = \varepsilon\bar{\psi}$ gelangen können.

   b) Zeigen Sie über die Abbruchbedingung dieser Rekursionsformel, wie die Eigenenergien ε_n und die entsprechenden Eigenfunktionen $\bar{\psi}_n(y)$ des harmonischen Oszillators analytisch bestimmt werden können.
   Hinweis: Die Normierung der $\bar{\psi}_n(y)$ und die Divergenz der Rekursionsformel ohne Abbruchbedingung müssen nicht explizit gezeigt werden.

   c) Berechnen Sie ausgehend von obigen Resultaten den dritten angeregten Zustand des Systems $\bar{\psi}_3(y)$ (ohne Normierung) und die entsprechende Eigenenergie ε_3.

2. **(18 Punkte)** Ein Strom von Teilchen der Masse m falle in positiver x-Richtung laufend auf die Potentialschwelle eines eindimensionalen Problems ein,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 2V_0, & \text{für } 0 < x < a, \\ -3V_0, & \text{für } x > a, \end{cases}$$

wobei Sie in Ihren Rechnungen von Anfang an die Relation

$$V_0 a^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}$$

benutzen dürfen.

   a) Skizzieren Sie das Potential und wählen Sie für den einlaufenden Teil der Welle im Bereich $x < 0$ den Ansatz $\Psi_{ein} = Ae^{ikx}$ mit $A = 1$. Bestimmen Sie die entsprechenden Wellenfunktionen in allen Bereichen $x \in \mathbb{R}$ für die Streuenergie $E = V_0 > 0$

   b) Berechnen Sie die durch die Schwelle transmittierte Wahrscheinlichkeitsstromdichte im Bereich $x > a$ für die Streuenergie $E = V_0$ und die Amplitude $A = 1$ aus a). Wie groß ist die entsprechende Transmissionswahrscheinlichkeit T des einlaufenden Teilchenstroms?

Bitte auch die Rückseite beachten!

3. **(19 Punkte)** Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ eines physikalischen Systems sei in einem 4-dimensionslosen Hilbertraum gegeben durch seine Wirkung auf eine orthonormale Basis $\{e\} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, |e_4\rangle\}$. Betrachten Sie zusätzlich eine Observable, welche durch einen Operator $\hat{A}$ beschrieben werde. Die Darstellung des Operators $\hat{A}$ in der Basis $\{e\}$ sei ebenfalls gegeben:

$$\begin{aligned} \hat{H}|e_1\rangle &= 0, \\ \hat{H}|e_2\rangle &= |e_2\rangle, \\ \hat{H}|e_3\rangle &= i|e_4\rangle, \\ \hat{H}|e_4\rangle &= -i|e_3\rangle, \end{aligned} \qquad A^{\{e\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3i \\ 0 & 0 & 3i & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Darstellung $H^{\{e\}}$ des Operators $\hat{H}$ in der Basis $\{e\}$

b) Welche möglichen Messwerte für die Energie gibt es in diesem System?
Hinweis: Überlegen Sie, wie Sie diese Aufgabe lösen können ohne die volle Determinante der 4 × 4 - Matrix berechnen zu müssen.

c) Wie sieht der Vektor $|g\rangle$ des energetischen Grundzustandes des Systems in der Basis $\{e\}$ aus?

d) Nehmen Sie an, Ihr System befinde sich im normierten Zustand

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{2}|e_1\rangle + i|e_3\rangle + |e_4\rangle)$$

.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit messen Sie an diesem System eine Energie von $E = 0$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit messen Sie eine Energie von $E = -2$? Berechnen Sie auch den Erwartungswert der Energie im Zustand $|\xi\rangle$.

e) Besitzen die Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{A}$ eine vollständige, orthonormierte, gemeinsame Eigenbasis $\{f\}$? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Wenn ja, geben Sie diese Basis in der $\{e\}$-Darstellung an. Wenn nein, stellen Sie den Operator $\hat{A}$ in der Eigenbasis von $\hat{H}$ dar.

f) Bilden die Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{A}$ einen vollständigen Satz kommutierender Observablen? Begründen Sie Ihre Antwort.

g) Welche Bedingung gilt für das Unschärfeprodukt $\Delta H \cdot \Delta A$ der beiden Operatoren? Begründen Sie Ihre Antwort.

h) Nehmen Sie an, Sie können im Experiment wiederholt die Observable A an einem System im Zustand $|\xi\rangle$ aus Punkt *d)* messen. Welchen Messwert werden Sie im Durchschnitt für A erhalten? Wie groß ist die Varianz $(\Delta A)^2$ Ihrer Messwerte?