2. Prüfung VU Quantentheorie I, 25.01.2015

1. **(18 Punkte)** Betrachten Sie ein gebundenes Elektron in einem Wasserstoffatom, beschrieben durch folgende Schrödingergleichung

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{\vec{L}^2(\theta,\phi)}{2\mu r^2}+V(r)\Big]\psi(r,\theta,\phi)=E\psi(r,\theta,\phi)$$

   a) ergänzen Sie in obiger Gleichung das Coulombpotential $V(r)$ und drücken Sie die relative Masse μ sowie die Relativkoordinaten $\vec{r}$ durch die jeweiligen Massen des Elektrons und des Kerns (m_e, M_N) und deren Positionen ($\vec{r_e}, \vec{r_N}$) aus (ohne Rechnung).

   b) Leiten Sie über einen Separationsansatz die relevante Gleichung für den Radialanteil $R(r)$ der Wellenfunktion $\psi(r,\theta,\phi)$ her.

   c) Formen Sie die Gleichung aus b) durch geeignete Transformation auf ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem für die Funktion $u(r)$ um. Lesen Sie aus dieser Gleichung den Bohrschen Radius a_0 ab und schreiben Sie diesen explizit an.

   d) Der Lösungsansatz für diese Funktion lautet:

$$u(r)=exp(-kr)\; r^{\alpha+1}\sum_{i=0}^{\infty} a_i\; r^i\;,$$

   wobei wir gefunden haben, dass $\alpha = l$ und

$$a_{i+1}=2\,\frac{k(l+i+1)-1/a_0}{4(l+1)i+i(i+1)}\,a_i$$

   Wofür steht in diesem Ansatz die Variable k? Betrachten Sie weiters das asymptotische Verhalten dieser Zwei-Term-Rekursionsbeziehung und argumentieren Sie warum die Rekursion abgebrochen werden muss. Leiten Sie aus der Abbruchbedingung ab, welche Werte die Energie- oder Hauptquantenzahl n annehmen kann. Was ist die Beziehung zwischen n und der Drehimpulsquantenzahl l? Bestimmen Sie auch die Bindungsenergien E_n des Elektrons.

2. **(17 Punkte)** Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich ein harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz ω, Masse m und Eigenzuständen $|n\rangle$ im kohärenten Glauberzustand

$$|\Phi_\alpha(t=0)\rangle = C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

   a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante C(vereinfachen Sie dazu die auftretenden Summenausdrücke)

   b) Berechnen Sie den Zustand $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ des harmonischen Oszillators für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$. Zeigen Sie, dass sich dieser Zustand in der Form

$$|\Phi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t}\,|\Phi_{\alpha(t)}(t=0)\rangle$$

   schreiben lässt und bestimmen Sie den Ausdruck für $\alpha(t)$

Bitte auch die Rückseite beachten!

c) Zeigen Sie explizt, dass dieser Zustand $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ Eigenzustand des Absteigers $\hat{a}$ mit Eigenwert $\alpha(t)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass der quantenmechanische Erwartungswert $\langle\Phi_\alpha(t)|\,\hat{p}\,|\Phi_\alpha(t)\rangle$ des Impulses dem klassischen Impuls $p(t) = D\ sin(\omega t - \delta)$ entspricht. Wie hängen die komplexe Zahl α und der Parameter δ zusammen (siehe Hinweise am Ende des Beispiels).

e) Angenommen, Sie wollen einen klassischen harmonischen Oszillator mit Eigenfrequenz ω möglichst gut mittels eines Glauberzustandes $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ beschreiben. Finden Sie einen möglichen komplexen Wert für $\alpha \neq 0$ in Ihrer quantenmechanischen Beschreibung, wenn als Anfangsbedingung für den Impuls des klassischen Oszillators $p(t = \frac{\pi}{2\omega}) = 0$ bekannt ist.

Hinweise: $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$, $\hat{p} = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)$

mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$

3. **(15 Punkte)** Der Spinoperator des Elektrons der Masse m und Ladung e^- kann in einer beliebigen Raumrichtung $\vec{n}$ als $S_{\vec{n}} = \hbar/2\ (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ dargestellt werden, wobei σ_i $(i \in \{x, y, z\})$ die Paulimatrizen sind (siehe Hinweis am Ende des Beispiels). Der Einheitsvektor in Kugelkoordinaten ist durch die Winkel θ, ϕ folgendermaßen bestimmt: $\vec{n} = \Big(sin(\theta)cos(\phi),\ sin(\theta)sin(\phi),\ cos(\theta)\Big)$.

a) Berechnen Sie explizit die Eigenwerte und dazugehörigen normierten Eigenzustände von $S_{\vec{n}}$ (in der S_z-Eigenbasis)

b) der Elektronenspin befinde sich nun in dem Eigenzustand von $S_{\vec{n}}$ mit dem maximalen Eigenwert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z-Komponente des Spins an diesem Zustand den Wert $+\hbar/2$ zu erhalten?

c) Stellen Sie den Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ eines Elektronenspins mit Hilfe des Spinoperators $S_{\vec{n}}$ dar, wenn sich der Spin in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\cdot\vec{n}$ befindet (siehe Hinweise am Ende des Beispiels)

d) schreiben Sie nun auf Basis des Hamiltonoperators von *c)* die Schrödingergleichung für die Bewegung des Elektronenspins im Magnetfeld $\vec{B} = B\cdot\vec{n}$ an und bestimmen Sie deren allgemeine zeitabhängige Lösung (die auftretenden Entwicklungskoeffizienten müssen nicht bestimmt werden).

Hinweise: Die Paulimatrizen lauten:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie zur Vereinfachung Ihrer Rechungen die Larmorfrequenz $\omega_l = \frac{eB}{m}$

sie können folgende trigonometrische Beziehungen in Ihren Rechnungen verwenden:

$$cos(\theta) = cos^2(\tfrac{\theta}{2}) - sin^2(\tfrac{\theta}{2}) \qquad sin(\theta) = 2\ sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot cos(\tfrac{\theta}{2})$$