Nachtest Quantentheorie I VU, 11.03.2015

1. **(18 Punkte)** Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz ω, in dem sich ein Teilchen der Masse m befinde (eindimensionales Problem).

   a) Schreiben Sie das Oszillatorpotential $\mathrm{V}(x)$ an. Zeichnen Sie in einer Skizze die drei niedrigsten Eigenenergien E_n, sowie die dazugehörigen Wellenfunktionen der stationären Zustände $\psi_n(x)$ in das Potential ein. Geben Sie den entsprechenden Werte von E_n explizit an.

   b) Wie lautet die Grundzustandswellenfunktion in der Ortsdarstellung $\psi_0(x)$? Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihres Ergebnisses durch explizites Einsetzen in die entsprechende Schrödingergleichung. Mit Ausnahme der Normierung sollen alle auftretenden Konstanten bestimmt werden.

   c) Wie lautet die Grundzustandswellenfunktion in der Impulsdarstellung $\tilde{\psi}_0(p)$? Berechnen Sie den gewünschten Ausdruck explizit aus dem Ergebnis von Punkt b). Auch hier soll nur die Normierungskonstante offen bleiben.
   Hinweis:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ .$$

   d) Wie groß sind (i) der Ortserwartungswert $\langle \psi_n | \, x \, | \psi_n \rangle$ und (ii) der Impulserwartungswert $\langle \psi_n | \, p \, | \psi_n \rangle$ im Zustand ψ_n (für alle $n \geq 0$)? (Antwort ohne Rechnung aber mit Begründung möglich.)

2. **(17 Punkte)** Betrachten Sie das in Abbildung 1 dargestellte Problem der Streuung an einem Potentialwall beliebiger Form $\mathrm{V}(x)$, welcher sich von $x = 0$ bis $x = L$ erstreckt. (außerhalb dieses Bereiches verschwindet das Potential.) Die Koeffizienten A, G geben die Amplituden der einlaufenden ebenen Welle und die Koeffizienten B, F die entsprechenden Amplituden der auslaufenden ebenen Wellen an (siehe Abbildung). Weiters sei die Streumatrix S des Problems bei einer fix gewählten Energie $E > 0$ gegeben durch

   $$S(E) = \begin{pmatrix} r\ e^{i\phi} & t\ e^{i\theta} \\ t\ e^{i\theta} & r\ e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

   mit den bekannten reellen Zahlen $r,\ t \neq 0$ sowie $\phi,\ \alpha,\ \theta \in [0, 2\pi]$

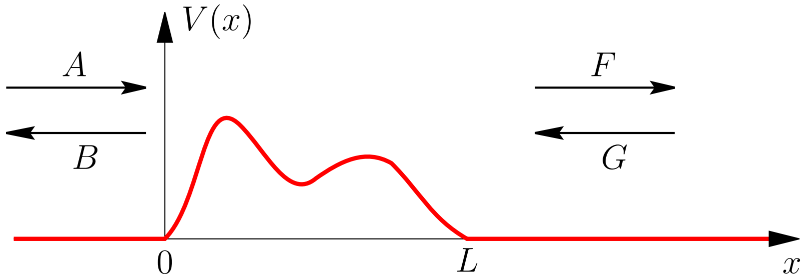

Abbildung 1: Streuproblem mit beliebigem Potential $\mathrm{V}(x)$.

   a) Schreiben Sie an, wie die Koeffizienten $A,\ B,\ F,\ G$ durch die Streumatrix S verknüpft sind (ohne Beweis).

Bitte auch die Rückseite beachten!

b) Welche Beziehung muss die Streumatrix erfüllen um die Flusserhaltung zu garantieren? Welche Bedingung ergibt sich daraus für r und t? Welche Beziehung müssen folglich die Phasen ϕ, θ und α erfüllen?

c) Wie groß sind die Transmissions- und die Reflexionswahrscheinlichkeiten einer von rechts ($x = +\infty$) einlaufenden ebenen Welle mit Energie E?

d) Zusätzlich zum Potentialwall V(x) zwischen $x = 0$ und $x = L$ wird nun ein zweiter, **identischer** Potentialwall im Bereich $x = 2L$ bis $x = 3L$ platziert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein von links einlaufender Strom von Teilchen der Masse m (beschrieben durch eine ebene Welle) mit der Energie E beide Potentialwälle durchdringt.

Hinweis: Berücksichtigen Sie die Mehrfachreflexionen zwischen den beiden Potentialwällen.

3. **(15 Punkte)** Gegeben sind zwei Drehimpulsvektoren $\vec{L}$ und $\vec{S}$, charakterisiert durch die beiden Quantenzahlen l und s. Zusammen bilden die beiden Drehimpulsvektoren den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

a) Welche Eigenschaften haben Operatoren, die einen Satz von kompatiblen Observablen bilden?

b) Skizzieren Sie die schematischen Darstellungen der Drehimpulsaddition in Form von Punktdiagrammen in der m_l/m_s- bzw. j/m_j-Ebene für $s = 2$ und $l = 1$ (wie in der Vorlesung gezeigt). Verbinden Sie in beiden Diagrammen Zustände (Punkte) mit konstantem m_j durch Linien.

c) Der Zustand eines Spin-2-Teilchens sei in der entkoppelten Drehimpulsbasis gegeben durch

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|l\ m_{l1}\rangle \oplus |s\ m_{s1}\rangle + |l\ m_{l2}\rangle \oplus |s\ m_{s2}\rangle \Big)$$

mit $l = 1, s = 2, m_{l1} = 0, m_{s1} = 2, m_{l2} = -1$ und $m_{s2} = -2$

i. Schreiben Sie den Zustand $|u\rangle$ in der gekoppelten Basis $|l\ s\ j\ m_j\rangle$ an. Verwenden Sie dazu die beigelegte Clebsch-Gordan-Tabelle.

ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit messen Sie an diesem Zustand für die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses den Wert $2\hbar$?

iii. Berechnen Sie den Erwartungswert für eine Messung des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}^2$ in diesem Zustand.

Viel Erfolg!