1. Tutorium - Quantentheorie I
10.10.2014

1. Gegeben sei ein Teilchen, welches durch die Wellenfunktion ($\alpha > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$)

$$\Psi(x) = A \cdot e^{-\alpha|x|} \cos(x) e^{i\phi x}$$

   beschrieben wird.

   a) Bestimmen Sie A so, dass die Wellenfunktion $\Psi(x)$ normiert ist.

   b) Wie wahrscheinlich ist es, das Teilchen im Intervall $[-\pi, \pi]$ anzutreffen?

2. Betrachten Sie ein System mit einem Freiheitsgrad, das Zustände mit Energien $E \in [0, \infty)$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Zustand mit Energie E befindet, hängt von der Temperatur T ab und ist gegeben durch die Boltzmann-Verteilung

$$P(E; \beta) = \frac{\exp(-\beta E)}{\int_0^\infty \exp(-\beta E') dE'}, \; \beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}} T}.$$

   a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle E \rangle$ der Energie des Systems bei der Temperatur T.

   b) Modifizieren Sie obiges System so, dass nur mehr diskrete Energien $E_n = \hbar\omega n, n \in \mathbb{N}$ erlaubt sind. Wie ändert sich dann der Erwartungswert der Energie?

   c) Erläutern Sie, wie die obigen Ergebnisse mit den Strahlungsgesetzen von Rayleigh-Jeans bzw. Planck zusammenhängen (keine Rechnung erforderlich).

   Hinweis:

   Der Erwartungswert $\langle X \rangle$ einer Zufallsvariablen (bzw. Messgröße) X ist jener Wert, der sich bei vielfachem Wiederholen des dazugehörigen „Experiments“ als Mittelwert der Ergebnisse (bzw. Messungen) ergibt, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X)$ auftreten. Für den Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsvariablen gilt:

$$\langle X \rangle = \int X P(X) dX$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A hermitesch? Ist A unitär? Welche Eigenschaften erfüllen Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen bzw. einer unitären Matrix?

b) Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die normierten Eigenvektoren von A.

c) Zeigen Sie explizit, dass die Eigenvektoren eine vollständige und orthogonale Basis bilden.

Zu kreuzen: 1,2,3