10. Tutorium - Quantentheorie I
19.12.2014

1. Gegeben sei ein Teilchen im $\mathbb{R}^3$, das durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{N}(2x - y - z)\exp[-(r/a)^2], \quad r = \sqrt{\vec{x}^2}, \quad a, N \in \mathbb{R}.$$

   a) Stellen Sie die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x,y,z)$ (sh. Abbildung 1) mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar (für eine entsprechende Auflistung sh. http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelflächenfunktionen).

   b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen $\vec{L}^2$ und L_z auf?

   c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_y \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$ in obigem Zustand.

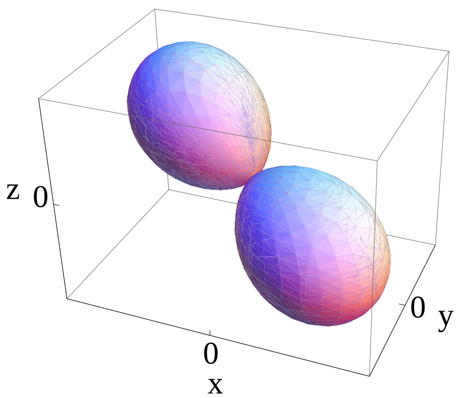

Abbildung 1: Winkelverteilung $|\Theta(\vartheta,\varphi)|^2$ von $\psi(x,y,z) = R(r)\cdot\Theta(\vartheta,\varphi)$.

2. Wie lässt sich der Drehimpulsoperator $\hat{L}_{z'}$ bezüglich einer beliebigen Achse z' als Funktion der bekannten Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ ausdrücken? Verwenden Sie dazu die jeweiligen Winkel, die die Achse z' mit den Achsen x, y, z einschließt.

   Wenden Sie Ihr Ergebnis für $\hat{L}_{z'}$ nun auf einen Zustand $|\psi\rangle$ an, welcher Eigenzustand von $\hat{L}_z$ ist: $\hat{L}_z|\psi\rangle = m|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass Sie bei einer Messung der Observable $L_{z'}$ im Mittel den Messwert $m\cos\vartheta$ erhalten, wenn die Achse z' einen Winkel ϑ mit der z-Achse einschließt. Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen "Vektormodells" für den Drehimpuls (sh. die letzte Plenumsfolie der 27. Vorlesung vom 03.12.2014).

3. In der Vorlesung wurde die z-Komponente des Drehimpulsoperators in sphärischen Koordinaten hergeleitet, $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$.

   a) Leiten Sie nun dementsprechend den Ausdruck für die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm$ in sphärischen Koordinaten her.

   b) Verwenden Sie nun diese Ausdrücke für die Operatoren $\hat{L}_\pm$ und $\hat{L}_z$, um den Drehimpulsoperator $\hat{L}^2$ in sphärischen Koordinaten mit Hilfe der Gl. (5.33) aus dem Skriptum zu finden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck aus dem Skriptum.

Zu kreuzen: 1,2,3