11. Tutorium - Quantentheorie I
09.01.2015

1. Wir betrachten das Elektron eines Wasserstoffatoms, dessen Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$|\psi\rangle = A\left[4\ |1\ 0\ 0\rangle + 2\ |2\ 0\ 0\rangle - i\ |2\ 1\ 0\rangle + \sqrt{10}\ |2\ 1\ {-1}\rangle + (1-2i)\ |3\ 2\ {-1}\rangle\right],$$

wobei $|n\ l\ m\rangle$ die Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatomes bezeichnen. Normieren Sie $|\psi\rangle$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0:

a) die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung der Energie den Messwert

$$E_n = \frac{-\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

zu finden,

b) den Erwartungswert der Energie.

c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrates den Messwert $b_l = \hbar^2\, l(l+1)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden.

d) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z-Komponente des Bahndrehimpulses den Messwert $-\hbar$ zu finden,

e) den Erwartungswert der z-Komponente des Bahndrehimpulses.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Messgrößenpaares $\{E, L^2\}$ das Messwertpaar $\{-\hbar^2/(8ma_0^2), 2\hbar^2\}$ zu finden. Hängt das Ergebnis davon ab, ob *zuerst* die Energie und *unmittelbar darauf* das Bahndrehimpulsquadrat oder umgekehrt gemessen wird?

g) Überlegen Sie, was man für die in (a) bis (e) errechneten Größen erhält, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0, sondern $t > t_0$ gewählt wird. (keine Rechnung erforderlich).

2. Betrachten Sie das Wasserstoffatom im zweiten angeregten Zustand

$$\langle \vec{r} \,|\, n=2,\ l=0,\ m=0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}, \qquad a_0 := \frac{\hbar^2}{m_e e^2}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) \tag{1}$$

Berechnen Sie:

a) Den Erwartungswert und die Unschärfe des Abstandes des Elektrons vom Atomkern,

b) den wahrscheinlichsten Wert dieses Abstandes und

c) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Abstand $r < a_0$ anzutreffen.

Hinweis:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho^\nu e^{-\beta\rho} = \frac{\nu!}{\beta^{\nu+1}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

$$\int \mathrm{d}\rho\, \rho^2 e^{-\beta\rho} = -\left[\frac{\rho^2}{\beta} + \frac{2\rho}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3}\right] e^{-\beta\rho} + C\,. \tag{3}$$

3. Betrachten Sie die stationären Zustände $|n\,l\,m\rangle$ des Wasserstoffatoms ($Z = 1$).

a) Das Wasserstoffatom befinde sich im angeregten Zustand mit $n = 3$. Bestimmen Sie die Frequenz des Photons, das beim Übergang in den Grundzustand emittiert wird. In welchem spektralen Bereich liegt die Frequenz? Hängen ihre Ergebnisse von den Quantenzahlen l und m ab? Warum (nicht)?

b) Besitzen die Eigenzustände $|n\,l\,m\rangle$ des Wasserstoffatoms ein elektrisches Dipolmoment? Berechnen Sie dazu den Erwartungswert $\langle n\,l\,m|\,\vec{d}\,|n\,l\,m\rangle$ mit $\vec{d} = -e\vec{r}$. Hinweis: Stellen Sie Überlegungen zur Parität der auftretenden Ausdrücke an.

4. Betrachten Sie die stationären Zustände $|\psi\rangle = |n\,l\,m\rangle$ des Wasserstoffatoms. Verwenden Sie eine Computer-Software Ihrer Wahl um die Flächen konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(\vec{r})|^2$ =konst für die Zustände $|2\,1\,0\rangle$ und $|2\,1\,\pm1\rangle$ graphisch darzustellen. Plotten Sie auch die entsprechenden Höhenschichtlinien in der yz-Ebene.

Zu kreuzen: 1,2,3,4