3. Tutorium - Quantentheorie I
24.10.2014

1. Untersuchen Sie in diesem Beispiel wie sich die Wellenfunktion $\psi(x)$ an einer Diskontinuität des Potentials $V(x)$ verhält. Betrachten Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung in einer Dimension:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)\,. \tag{1}$$

   Die zu untersuchenden Potentiale $V(x)$ besitzen eine Diskontinuität an der Stelle x_0:

   a) Potentialstufe: $V(x) = V_0\,\Theta(x - x_0), \quad V_0 \in \mathbb{R}\,.$

   b) Delta-Funktion: $V(x) = D\,\delta(x - x_0), \quad D \in \mathbb{R}\,.$

   Untersuchen Sie für diese beiden Fälle, ob die Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle x_0 stetig bzw. stetig differenzierbar bleibt. Skizzieren Sie den Verlauf von $\psi(x)$ in der Umgebung von x_0. Was passiert im Fall (a) wenn $V_0 \to \infty$?

   Hinweis: Lösen Sie das Problem, indem Sie die Schrödingergleichung in Eq. (1) räumlich aufintegrieren (betrachten Sie dabei speziell die räumliche Umgebung des Potentialsprungs).

2. Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einer Falle der Länge und Breite d (2-dimensionales Problem, $d, V_0 \in \mathbb{R}^+$),

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)+V(x)+V(y)\right]\psi(x,y)=E\psi(x,y)\,, \quad V(\xi) = \begin{cases} \infty & \xi > 0 \\ -V_0 & -d < \xi < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   a) Skizzieren Sie das Potential und machen Sie einen Ansatz für die stationären Lösungen des Problems. Nutzen Sie die Separation in x und y Koordinaten und stellen Sie die Übergangsbedingungen auf.

b) Geben Sie die implizite Gleichung für die gebundenen Eigenenergien des Hamiltonoperators an.

c) Bestimmen Sie graphisch die Eigenenergien des Systems. Geben Sie Bedingungen für die Existenz gebundener Zustände an. Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion für die drei niedrigsten Energieniveaus (keine Rechnung).

d) Geben Sie den Entartungsgrad der niedrigsten zwei Energieniveaus an. (Der Grad der Entartung M eines Eigenwertes E_n ist gegeben durch die Anzahl von zueinander linear unabhängigen Eigenvektoren $[\phi_n(x)]_i$, die demselben Eigenwert E_n zugeordnet sind.)

e) Wie verschieben sich die Energieeigenwerte als Funktion von V_0? Interpretieren Sie Ihre Lösung physikalisch.

3. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $V(x)$.

a) Es soll gezeigt werden, dass für beliebige zusammenhängende Potentiale $V(x)$ die *gebundenen* (stationären) Zustände des Teilchens nicht entartet sein können: Zu jeder Eigenenergie E_n existiert nur genau ein einziger linear unabhängiger Eigenzustand $\phi_n(x)$.

Gehen Sie zu Beginn Ihrer Beweisführung davon aus, dass Sie zwei Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1$, $[\phi_n(x)]_2$ zum selben Eigenwert E_n besitzen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,[\phi_n''(x)]_i + V(x)\,[\phi_n(x)]_i = E_n[\phi_n(x)]_i \quad \text{mit} \quad i = 1,\, 2\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Sie davon ausgehend zu folgender Beziehung für die Wronski-Determinante der zwei Funktionen, $[\phi_n(x)]_1$ und $[\phi_n(x)]_2$, gelangen können:

$$[\phi_n(x)]_2\,[\phi_n'(x)]_1 - [\phi_n(x)]_1\,[\phi_n'(x)]_2 = C\,. \tag{3}$$

Um den gesuchten Beweis zu erbringen, bestimmen Sie zuerst die Konstante C und zeigen Sie anhand von Gl. (3), dass die beiden Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1$, $[\phi_n(x)]_2$ voneinander linear abhängig sind.

Hinweis: Für einen gebundenen Zustand gilt, dass seine Wellenfunktion $\phi_n(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

b) Beweisen Sie, dass bei eindimensionalen Potentialen gebundene Wellenfunktionen immer reell gewählt werden können.

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Punkt a) für Ihren Beweis.

c) Argumentieren Sie, weshalb die periodische Randbedingung aus Bsp. 2 der vorigen Woche doch Entartungen zulässt.

Zu kreuzen: 1ab,2ab,2cde,3abc