4. Tutorium - Quantentheorie I
31.10.2014

1. Für die rechteckige Barriere

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & 0 < x < L, \\ 0 & x \geq L \end{cases}$$

sind die Streuzustände für superbarrieren-Streuung ($E > V_0$) zu berechnen. Lösen Sie dazu folgende Aufgaben:

   a) Auf die Barriere falle in positiver x-Richtung laufend ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E > V_0$ ein. Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T als Funktion von E und skizzieren Sie Ihr Ergebnis.

   b) Bestimmen Sie die Reflektionswahrscheinlichkeit R aus der Unitaritätsbedingung der Streumatrix (Flusserhaltung) und zeichnen Sie den Verlauf von R in Ihre Skizze ein. Überprüfen Sie auch, ob Ihre Lösung mit jener für subbarrieren-Streuung (siehe Vorlesung) im Limes $E \to V_0$ übereinstimmt.

2. Betrachten Sie nun die rechteckige Barriere aus Bsp. 1 als Summe von zwei Stufen-Funktionen,

$$V(x) = V_0 \, [\Theta(x) - \Theta(x - L)]. \tag{1}$$

   a) Berechnen Sie nun wie in Bsp. 1a) superbarrieren-Streuung ($E > V_0$), diesmal allerdings für die zwei Stufen-Funktionen separat. Ermitteln Sie die jeweiligen Transmissions- und Reflektionsamplituden, t und r, als Funktion von E an den Stellen $x = 0$ für die Potentialstufe $V(x) = V_0 \, \Theta(x)$ bzw. bei $x = L$ für $V(x) = V_0 \, [1 - \Theta(x - L)]$.

   b) Betrachten Sie nun die Streuung des einfallenden Stroms von Teilchen der Masse m an der rechteckigen Barriere als Vielfach-Reflektion an den Stellen $x = 0$ und $x = L$ und berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T als Funktion von E. Das Ergebnis sollte mit dem Resultat aus Bsp. 1a) übereinstimmen.

      Hinweis: Berücksichtigen Sie die Phase, die während der Vielfach-Reflektion zwischen den Stellen $x = 0$ und $x = L$ akkumuliert wird.

c) Bringen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Konzept eines Fabry-Pérot-Interferometers aus der Optik in Verbindung (keine Rechnung erforderlich).

3. Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < -a \\ -\frac{\hbar^2}{m} D\, \delta(x) & x \geq -a, \end{cases}$$

mit $D > 0$ und $a > 0$.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem mittels eines geeigneten Ansatzes für die Eigenfunktionen $\psi(x)$.

b) Leiten Sie die Bedingung für die Existenz gebundener Zustände her. Diese Bedingung ist eine transzendente Gleichung bezüglich a, D und $\kappa = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$, wobei stets $E < 0$ gilt.

c) Finden Sie mit Hilfe einer graphischen Analyse der transzendenten Gleichung den minimalen Wert a_{min} für welchen ein gebundener Zustand noch existiert. Argumentieren Sie physikalisch, warum es für $a < a_{min}$ überhaupt keinen gebundenen Zustand gibt.

d) Welcher Wert für κ und damit für E ergibt sich aus den Eigenwertbedingungen für festes D und für $a \to \infty$?

Zu kreuzen: 1,2,3ab,3cd