5. Tutorium - Quantentheorie I
07.11.2014

1. Wie groß ist die de-Broglie Wellenlänge der folgenden Objekte?
   a) Eine Granate (14 kg) der 122-mm-Haubitze D-30, die sich mit 740 m/s bewegt.
   b) Ein Na-Atom, das durch Laser-Kühlung auf eine Temperatur von $T = 240\mu K$ gebracht wurde.
   c) Ein Staubteilchen mit Radius 1.5μm und Dichte 200kg$/m^3$ das bei Raumtemperatur durch Luftmoleküle hin- und hergestoßen wird?

2. Betrachten Sie den in der Abbildung 1 dargestellten Aufbau für die Beugung eines von links einfallenden Stroms von Teilchen an einem Spalt mit der Breite d. Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion der Teilchen direkt am Spalt ($x = x_0$) durch eine kastenförmige Welle beschrieben wird, die sich in Einfallsrichtung x wie eine ebene Welle mit Impuls $\hbar k_0$ bewegt,

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \exp(ik_0 x)/\sqrt{d} & -d/2 \leq y \leq d/2 \\ 0 & |y| \geq d/2 \end{cases} .$$

   Die Teilchen werden auf einem Schirm gemessen, der sich in einem Abstand L vom Spalt befindet.

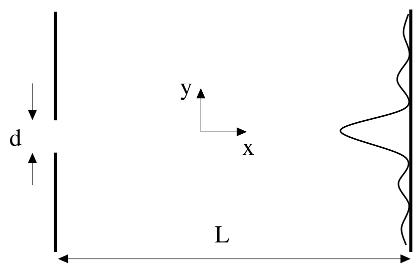

Abbildung 1: Experiment zur Beugung am Spalt.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $\psi(x,y)$ im Spalt ($x = x_0$). Überprüfen Sie, ob die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort y und Impuls p_y erfüllt ist.
Hinweis: Schätzen Sie die Unschärfen σ_y, σ_{p_y} der Einfachheit halber mit dem Abstand zwischen den ersten beiden Nullstellen der jeweiligen Funktionen ab.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(y)$ ein Teilchen an der Position y des Schirms (bei festem $x = x_0 + L$) zu messen (unter der Annahme dass $L \gg d, y$ und dass zwischen Spalt und Schirm kein Potential auf das Teilchen wirkt). Verwenden Sie dabei, dass die Impulsverteilung der Teilchen in y-Richtung über die Fourier-Transformierte aus (a) bestimmt werden kann. Reproduzieren Sie damit das bekannte Resultat aus der Beugungstheorie,

$$P(y) = C \left[\frac{\sin(Ay)}{Ay}\right]^2 .$$

Bestimmten Sie die Konstanten A, C.

c) Erläutern Sie Ihr Ergebnis für $P(y)$ anhand des Huygensschen Prinzips (siehe dazu optische Beugung am Spalt).

3. Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potential der folgenden Form:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & a/2 < |x| \leq a \\ -V_0 & |x| < a/2, \\ +\infty & |x| > a \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und $a > 0$.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem mittels eines geeigneten Ansatzes für die Eigenfunktionen $\psi(x)$ und Eigenenergien $E < 0$.

b) Leiten Sie eine Bedingung für die Größe $V_0 a^2$ her, unter der es mindestens einen gebundenen Zustand mit $E < 0$ gibt.

Hinweis: Benutzen Sie den Umstand, dass für ein symmetrisches Potential die Eigenfunktionen symmetrisch oder antisymmetrisch gewählt werden können.

Zu kreuzen: 1abc,2abc,3ab