7. Tutorium - Quantentheorie I
21.11.2014

1. Beweisen Sie unter Verwendung der formalen Operatorgleichung

$$[A, B_1 B_2] = [A, B_1] \, B_2 + B_1 \, [A, B_2]$$

die Beziehung

$$[A, B^n] = \sum_{\nu=1}^{n} B^{\nu-1} \, [A, B] \, B^{n-\nu} \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Was ergibt sich daraus für die Kommutatoren $[X, P^n]$, $[X^m, P^n]$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, wenn $[X, P] = i\hbar\mathbb{1}$ gilt?

2. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum sind der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Operator $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die orthonormierten Basiszustände $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \hat{H}|\phi_1\rangle &= -a|\phi_1\rangle & \hat{B}|\phi_1\rangle &= b|\phi_1\rangle \\ \hat{H}|\phi_2\rangle &= a|\phi_2\rangle & \hat{B}|\phi_2\rangle &= 2ib|\phi_3\rangle \\ \hat{H}|\phi_3\rangle &= 2a|\phi_3\rangle & \hat{B}|\phi_3\rangle &= -2ib|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Matrizen $H^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$, die den Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ zugeordnet sind.
Sind $\hat{H}$ und $\hat{B}$ hermitesch? Kommutieren $\hat{H}$ und $\hat{B}$?

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{B}$. Ordnen Sie die Zustände aufsteigend nach den dazugehörigen Eigenwerten und geben Sie die Vektordarstellung der Eigenzustände in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ an. Überprüfen Sie, ob die Eigenzustände orthogonal sind.

c) Der Zustand eines Teilchens sei zu einem bestimmten Zeitpunkt durch

$$|\chi\rangle = \frac{1}{5} \left(3|\phi_1\rangle + 4|\phi_3\rangle\right) \tag{1}$$

gegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, bei einer Energiemessung die Energieeigenwerte E_1, E_2, E_3, bzw. bei einer Messung der Observablen B die Eigenwerte B_1, B_2, B_3 zu messen.
Berechnen Sie außerdem die Erwartungswerte der Energie und der Observablen B.

3. Gegeben sei eine operatorwertige Funktion $\hat{F}(\hat{A})$ eines hermiteschen Operators $\hat{A}$, welche durch eine Potenzreihe darstellbar ist:

$$\hat{F}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n \quad , \text{wobei } f_n \in \mathbb{R} \text{ und } \hat{A}^n = \prod_{i=1}^{n} \hat{A}.$$

   a) Zeigen Sie, dass auch $\hat{F}(\hat{A})$ in diesem Fall hermitesch ist.
   b) Sind die Eigenvektoren von $\hat{A}$ auch Eigenvektoren von $\hat{F}(\hat{A})$? Wie berechnen sich die Eigenwerte von $\hat{F}(\hat{A})$?
   c) Geben Sie darauf basierend $\hat{F}(\hat{A})$ in Spektraldarstellung an.
   d) Gegeben sei der Operator $\hat{S}$ bezüglich einer beliebigen Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ ($\{e\}$-Darstellung):

$$\hat{S}^{\{e\}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

   Berechnen Sie den Operator $\hat{B} = e^{\hat{S}}$ in der $\{e\}$-Darstellung.
   Hinweise:

   - *Die Exponentialfunktion eines Operators ist definiert über die Taylorreihe* $e^{\hat{S}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{S}^n$.
   - *Berechnen Sie zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\hat{S}$ und Verwenden Sie Ihre Einsichten aus Punkt c).*

Zu kreuzen: 1,2,3