1. Test VU Quantentheorie I, 27.11.2015

1. **(12 Punkte)** Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Kreisfrequenz ω.

   a) Schreiben Sie die klassische Hamiltonfunktion $H(x,p)$ und den quantenmechanischen Hamiltonperator $\hat{H}$ in Ortsdarstellung an.

   b) Wie verhält sich die der Hamiltonoperator unter der Paritätstransformation $x \to -x$? Was folgt daraus für die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators?

   c) Wie lauten die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ und die dazugehörige Eigenenergie E_0 des harmonischen Oszillators (keine Rechnung erforderlich)? Skizzieren Sie $\psi_0(x)$ und das harmonische Potential. Wie wahrscheinlich ist es ein Teilchen im Grundzustand des harmonischen Oszillators bei einer Ortsmessung im linken Halbraum ($x < 0$) zu finden?

   d) Welches Ergebnis liefert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx$ für beliebige Eigenfunktionen $\psi_m(x), \psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators?

   e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen Zustand $\Phi(x)$ im Oszillator-Potential die Energie $E = 0$ zu messen?

   f) Existieren für den harmonischen Oszillator auch ungebundene Streuzustände? Falls ja, zu welchen Energien? Falls nein, warum nicht?

   g) Wie verändert sich das Energiespektrum des harmonischen Oszillators, wenn zum harmonischen Potential der Ausdruck $\bar{V}(x) = \alpha m\omega^2 x$, $\alpha > 0$ addiert wird?

   Hinweis: Zur Beantwortung der Fragen sind keine längeren Rechnungen notwendig. Eine stichhaltige und nachvollziehbare Begründung der Antworten ist allerdings immer erforderlich.

2. **(16 Punkte)** Ein Strom von Teilchen der Masse m trifft von *links* in positiver x-Richtung laufend auf das Potential (eindimensionales Problem)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}, \quad V_0 > 0\,.$$

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des einfallenden Stromes sei gegeben durch

$$j_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m},\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,.$$

Für die Energie gelte $\boldsymbol{E > V_0}$.

a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf $V(x)$. Wie lauten die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Unstetigkeitsstelle des Potentials $x = 0$ (keine Herleitung erforderlich)?

b) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E > V_0$ und bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ des Teilchens für alle $x \in \mathbb{R}$ (keine Rechnung erforderlich). Geben Sie eine physikalische Begründung für die Form von $\rho(x)$ in den Bereichen $x < 0$ bzw. $x > 0$ an.

d) Berechnen Sie den Betrag der Stromdichte des reflektierten und transmittierten Wahrscheinlichkeitsstromes j_{r} und j_{t}. Berechnen Sie daraus den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T der Potentialstufe für den Fall $E > V_0$. Welche Beziehung müssen T und R allgemein erfüllen (und warum)?

e) Berechnen Sie $T(E)$ und $R(E)$ für die Grenzfälle $E \to \infty$ und $E \to V_0$ (für festes V_0).

f) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus (d) und (e) mit den Resultaten für ein klassisches Teilchen. Wo liegen die Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten?

3. **(10 Punkte)** Betrachten Sie einen N-dimensionalen Hilbertraum, der von den Basisvektoren $\{|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_N\rangle\}$ aufgespannt wird. Ein hermitescher Operator $\hat{P}$ mit der Eigenschaft $\hat{P}^2 = \hat{P}$ (Idempotenz) heißt Projektionsoperator.

   a) Verwenden Sie die angegebene Definition, um die möglichen Eigenwerte von Projektionsoperatoren $\hat{P}$ zu bestimmen.

   b) Zeigen Sie unter Verwendung der braket-Schreibweise, dass insbesondere der Operator $\hat{P}_n$ mit der Eigenschaft $\hat{P}_n |\phi_m\rangle = \delta_{mn} |\phi_m\rangle$ ein Projektionsoperator ist.

   c) Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators $\hat{P}_{n=3}$ bezüglich der Basis $\{\phi\}$?

   d) Beschreiben Sie die Wirkung des Operators $\hat{P}_n$ auf einen beliebigen Zustand $|\Psi\rangle$ des Hilbertraums. Welche Bedeutung hat der Erwartungswert $\langle\Psi| \hat{P}_n |\Psi\rangle$?

   e) Handelt es sich bei dem Ausdruck $\hat{P}_\Sigma = \sum_{i=1}^{M} \hat{P}_i$ $(M \leq N)$ ebenfalls um einen Projektionsoperator? Welche Bedeutung hat der Erwartungswert $\langle\Psi| \hat{P}_\Sigma |\Psi\rangle$? Diskutieren Sie den Grenzfall $M = N$.

4. **(12 Punkte)** Gegeben sei ein zweidimensionaler komplexer Hilbertraum, für den eine Basis durch die orthonormierten Eigenzustände $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ des Hamiltonoperators $\hat{H}$ gegeben ist,

$$\hat{H} = \hbar\omega |\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 2\hbar\omega |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\,,\ \omega > 0\,.$$

Ein weiterer Operator $\hat{A}$ sowie ein Zustand $|\chi\rangle$ seien in der $\{\phi\}$-Basis durch

$$A^{\{\phi\}} = b\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \text{ und } |\chi\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}}\,(|\phi_1\rangle - 2i\,|\phi_2\rangle)$$

gegeben ($b \in \mathbb{R}$).

a) Stellen Sie den Operator $\hat{A}$ und den Zustand $|\chi\rangle$ in der Basis der Eigenfunktionen von $\hat{A}$ dar ($\{a\}$-Basis).

b) Begründen Sie, warum auch dem Operator $\hat{A}$ eine Observable zugeordnet werden kann. Wie lauten die dazugehörigen möglichen Messwerte?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einer Energiemessung des Zustands $|\chi\rangle$ den Wert $E = 2\hbar\omega$ zu erhalten.

d) Wie wahrscheinlich ist es bei einer Messung von A am Zustand $|\chi\rangle$ den Wert $a = 0$ zu erhalten?

e) In einem Experiment wird für eine Vielzahl von Teilchen im Zustand $|\chi\rangle$ die Energie gemessen. Welchen Messwert wird man im Durchschnitt erhalten? Wie groß ist die Standardabweichung der Messwerte?

f) Für ein Teilchen im unbekannten Zustand $|\Psi\rangle$ wird bei einer Energiemessung der Messwert $E = \hbar\omega$ bestimmt. Welche Aussagen können Sie daraus über den Zustand $|\Psi\rangle$ treffen?