1. Tutorium VU Quantentheorie I, 16.10.2015

1. Ein Teilchen, das sich nur entlang einer kartesischen Koordinate bewegen kann, sei durch die folgende Wellenfunktion beschrieben ($b > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$ konstant):

$$\psi(x) = Ae^{-2b|x|}e^{i\phi x}$$

   a) Welchen Wert muss A annehmen, so dass $\psi(x)$ sinnvoll normiert ist?

   b) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Intervall $-2 \leq x \leq 2$.

2. Die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m in einer Raumdimension lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x,t)$$

   Finden Sie eine allgemeine Lösung der Gleichung für ein freies Teilchen ($V(x) = 0$) mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t)$ (ohne Berücksichtigung von Randbedingungen). Untersuchen Sie, ob die gefundene Lösung normierbar ist und diskutieren Sie Ihr Resultat. Muss jede Lösung der Schrödingergleichung separierbar sein?

3. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Potentialtopf, d.h. im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ \infty & x \geq L \end{cases} .$$

   Die dazugehörigen Wellenfunktionen der Bindungszustände für Dirichlet-Randbedingungen ($\psi(0) = \psi(L) = 0$) sind bereits aus dem Plenum bekannt:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$, sowie die Standardabweichung $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ der Ortsverteilung für die Zustände ψ_n.

   b) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) für große Quantenzahlen ($n \to \infty$) mit den statistischen Erwartungswerten eines klassischen Teilchens. Bestimmen Sie dazu die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte das Teilchen bei unbekanntem Aufenthaltsort im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden.

Hinweis:

Der Erwartungswert $\langle X \rangle$ einer Zufallsvariablen (bzw. Messgröße) X ist jener Wert, der sich nach vielen Wiederholungen des dazugehörigen „Experiments“ als Mittelwert der Ergebnisse (bzw. Messungen) ergibt, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X)$ auftreten. Für den Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsvariablen gilt:

$$\langle X \rangle = \int X P(X) dX$$

4. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, das wie im dritten Beispiel auf den Bereich $0 \leq x \leq L$ beschränkt ist. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x,t) = E \psi(x,t)$$

nun für *Neumann-Randbedingungen* ($\psi'(0) = \psi'(L) = 0$) und bestimmen Sie die normierten Eigenfunktionen ψ_n sowie die dazugehörigen Eigenenergien. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Fall aus Beispiel 3!

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4