10. Tutorium VU Quantentheorie I, 08.01.2016

1. Die Winkelabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Photoemission von Elektronen aus einem isotropen $1s$ Bindungszustand, sei gegeben durch den Ausdruck $\Psi(\theta, \varphi) = \alpha \cos(\theta)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

   a) Entwickeln Sie Ψ nach Kugelflächenfunktionen und bestimmen Sie die möglichen Messwerte für den Drehimpuls. Diskutieren Sie Ihr Resultat.

   b) Betrachten Sie nun die Wahrscheinlichkeitsdichte der Photoemission $W_\Psi(\theta, \varphi) = |\Psi(\theta, \varphi)|^2$. Entwickeln Sie auch $W_\Psi(\theta, \varphi)$ nach Kugelflächenfunktionen und vergleichen Sie das Ergebnis mit (a).

   c) Bestimmen Sie außerdem die Parität von Ψ und W_Ψ.

2. Ein Teilchen mit Masse m befindet sich in einem kurzreichweitigen Potential $V(x)$, das durch eine δ-“Funktion” angenähert werden kann:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x),\ D > 0$$

   Schreiben Sie die eindimensionale, stationäre Schrödingergleichung in *Impulsdarstellung* an (siehe Plenum vom 16.12.2015).

   a) Finden Sie die Energien aller gebundenen Zustände ($E < 0$) und die dazugehörigen (normierten) Wellenfunktionen $\tilde{\psi}(p)$.

   b) Berechnen Sie aus $\tilde{\psi}(p)$ die dazugehörige Funktion im Ortsraum $\psi(x)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem 3. Beispiel aus dem 2. Tutorium.

   Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2+\alpha^2)^2} = \frac{\pi}{2\alpha^3}\,, \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{i\beta\xi}}{\xi^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\beta|}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}$

3. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im *zweidimensionalen*, isotropen harmonischen Oszillatorpotential:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

   Lösen Sie die zweidimensionale, stationäre Schrödingergleichung in *kartesischen* Koordinaten,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, y)\right] \psi(x, y) = E\psi(x, y)\,,$$

   und bestimmen Sie die normierten Bindungszustände und Eigenenergien des Systems. Untersuchen Sie außerdem den Entartungsgrad der gefundenen Eigenzustände.

   Hinweis: Die Eigenfunktionen und Eigenenergien des eindimensionalen harmonischen Oszillators können Sie als bekannt voraussetzen.

4. Betrachten Sie erneut den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator aus dem 3. Beispiel. Lösen Sie die Schrödingergleichung nun in *Polarkoordinaten* (siehe Plenum vom 16.12.2015),

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r,\phi)\right]\psi(r,\phi) = E\psi(r,\phi)\,,$$

und bestimmen Sie die normierten Bindungszustände und Eigenenergien des Systems. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Stellen Sie den Laplace-Operator in Polarkoordinaten unter Verwendung des Drehimpulsoperators dar.

b) Wählen Sie einen Separationsansatz $\psi(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ und lösen Sie die resultierenden (Differential-)Gleichungen für Radial- und Winkelanteil getrennt.

c) Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Radialgleichung und zeigen Sie, dass $e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}}$ $\left(r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)$ eine Lösung der Radialgleichung für $r \to \infty$ ist und dass für $r \to 0$ nicht-singuläre Lösungen proportional zu $r^{|l|}$ $(l \in \mathbb{Z})$ sein müssen.

d) Wählen Sie basierend auf Ihren Ergebnissen aus (c) den Ansatz $R(r) = r^{|l|}e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}}f(r)$ und zeigen Sie, dass sich die resultierende Differentialgleichung für f mit $\xi = \frac{r^2}{r_0^2}$, $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ und $n_r = \frac{1}{2}(\epsilon - |l| - 1)$ in folgender Form schreiben lässt:

$$\xi\frac{df^2}{d\xi^2} + (|l| + 1 - \xi)\frac{df}{d\xi} + n_r f = 0$$

e) Finden Sie ein orthogonales Polynom, dass die Differentialgleichung für $f(\xi)$ erfüllt (keine Rechnung erforderlich) und schreiben Sie damit die gesuchten normierten Bindungszustände des Systems an. Wie lauten die Eigenenergien? Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem 3. Beispiel.

Hinweis: Verwenden Sie dazu beispielsweise die Digital Library of Mathematical Functions: `http://dlmf.nist.gov/`

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4abc/4de