10. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 08.01.2016

1. a) $\Psi = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\alpha Y_{10}$. Die möglichen Messwerte für L^2 und L_z sind $2\hbar^2$ $(l=1)$ und $L_z = 0$ $(m=0)$ in Einklang mit den Auswahlregeln für Photoemission.

   b) $W_\Psi = |\alpha|^2 \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\left(Y_{20} + \sqrt{\frac{5}{4}}Y_{00}\right)$. Wie in (a) gilt $m = 0$, aber für l finden wir 0 und 2 .

   c) Mit dem Paritätsoperator Π kommt man unter Verwendung von

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \overset{\Pi}{\rightarrow} \begin{pmatrix} r \\ \pi - \theta \\ \varphi + \pi \end{pmatrix}$$

   bzw.

$$\Pi Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}$$

   zu den Ergebnissen $\Pi\Psi = -\Psi$ und $\Pi W_\Psi = W_\Psi$.

2. Die Impulsdarstellung der Schrödingergleichung lautet

$$\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p) + \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}p' \left(-\frac{\hbar^2 D}{m}\delta(x)\right) e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p-p')x}\tilde{\psi}(p') = E\tilde{\psi}(p) \ ,$$

   wobei wir bereits $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}D\delta(x)$ verwendet haben.

   a) Als einzige gebundene Lösung der Gleichung erhält man $\tilde{\psi}(p) = \sqrt{\frac{2\hbar D}{\pi}}\frac{\hbar D}{p^2+\hbar^2 D^2}$ mit der dazugehörigen Eigenenergie $E = -\frac{\hbar^2 D^2}{2m}$.

   b) $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \tilde{\psi}(p)\, e^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p = \sqrt{D}e^{-D|x|}$. Dies entspricht genau dem Ergebnis aus dem 2. Tutorium.

3. Der Hamiltonoperator lässt sich als Summe zweier eindimensionaler Hamiltonoperatoren schreiben:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m\omega^2 y^2}{2} = H_x + H_y$$

   Die Schrödingergleichung lässt sich deshalb mittels Separation lösen, $\Psi(x,y) = \Psi_{n_x}(x)\,\Psi_{n_y}(y)$, und man erhält die beiden Gleichungen:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\Psi_{n_x}(x) = E_x\Psi_{n_x}(x)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{m\omega^2 y^2}{2}\right)\Psi_{n_y}(y)=E_y\Psi_{n_y}(y)$$

Die Lösung ergibt sich daher zu:

$$E=E_x+E_y=\hbar\omega\left(n_x+n_y+1\right)$$

$$\Psi(x,y)=\Psi_{n_x}(x)\,\Psi_{n_y}(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}x_0}\frac{1}{\sqrt{2^{n_x}n_x!}}\frac{1}{\sqrt{2^{n_y}n_y!}}H_{n_x}\left(\frac{x}{x_0}\right)H_{n_y}\left(\frac{y}{x_0}\right)e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2x_0^2}}$$

Für ein gegebenes $n=n_x+n_y$ gibt es somit $n+1$ Möglichkeiten um mit verschiedenen Kombinationen von n_x und n_y dieselbe Energie zu erhalten.

4. a) $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{\hbar^2 r^2}L_z^2$

b) Mit dem gegebenen Ansatz folgen nach der Separation die beiden Gleichungen:

$$L_z^2\Phi(\phi)=C\Phi(\phi)\ \text{ und }\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2\omega^2 r^2}{\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{C}{\hbar^2 r^2}\right)R(r)=0$$

Φ ist Eigenfunktion von L_z, also gilt $\Phi(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}l\phi}$ und $C=\hbar^2 l^2$ ($l\in\mathbb{Z}$). Somit folgt für die radiale Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2\omega^2 r^2}{\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{l^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

c) Im Grenzfall $r\to\infty$ erhält man $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\simeq\frac{m^2\omega^2 r^2}{\hbar^2}R$ und somit $R(r\to\infty)=e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}}$ mit $r_0^2=\frac{\hbar}{m\omega}$.

Analog erhält man für $r\to 0$ die Gleichung $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{l^2}{r^2}R=0$ welche die Lösung r^l ($l\in\mathbb{Z}$) hat. Um eine nicht singuläre Lösung bei $r=0$ zu erhalten, muss gelten $R(r\to 0)=r^{|l|}$.

d) Unter Berücksichtigung von $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{2r}{r_0^2}\frac{\partial}{\partial\xi}$ und $\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{2}{r_0^2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{4\xi}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$ folgt nach zweimaliger Differentiation von $R(\xi)=(r_0\xi)^{\frac{|l|}{2}}e^{-\frac{\xi}{2}}f(\xi)$ und Einsetzen in die radiale Gleichung: $\xi\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2}+(|l|+1-\xi)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}+n_r\xi=0$

e) Die resultierende Differentialgleichung aus (d) wird für $n_r\in\mathbb{N}_0$ von den assozierten Laguerre-Polynomen gelöst, $f(\xi)=L_{n_r}^{|l|}(\xi)$. Beachtet man die Orthogonalitätsrelation der assozierten Laguerre-Polynome $\int e^{-\xi}\xi^l L_m^{|l|}L_n^{|l|}\mathrm{d}\xi=\frac{(n+|l|)!}{n!}\delta_{mn}$ so folgt

$$\Psi(r,\phi)=Nr^{|l|}e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}}L_{n_r}^{|l|}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)e^{\mathrm{i}l\phi}\ \text{ mit }\ N=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{r_0^{|l|+1}}\sqrt{\frac{n!}{(n+|l|)!}}$$

Die Energie ergibt sich zu $E=(2n_r+|l|+1)\hbar\omega$. Es ergeben sich somit exakt dieselben Energieeigenwerte und Entartungsgrade wie in Bsp. 3.