11. Tutorium VU Quantentheorie I, 15.01.2016

1. Untersuchen Sie ein Wasserstoffatom, dessen Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch die elektronische Wellenfunktion $|\psi\rangle$ beschrieben wird,

$$|\psi\rangle = A\Big[2\,|1\;0\;0\rangle + 4\,|2\;1\;1\rangle - i\,|2\;1\;0\rangle + \sqrt{10}\,|2\;1\;{-1}\rangle + (1-2i)\,|3\;2\;1\rangle\Big]\,,$$

wobei $|n\;l\;m\rangle$ die orthonormierten Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatomes bezeichnen. Normieren Sie $|\psi\rangle$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0:

a) die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung der Energie den Messwert $E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) zu erhalten.

b) den Erwartungswert der Energie.

c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrates den Messwert $b_l = \hbar^2\,l(l+1)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden.

d) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z-Komponente des Bahndrehimpulses den Messwert $\hbar$ zu erhalten,

e) den Erwartungswert der z-Komponente des Bahndrehimpulses.

f) Berechnen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Messgrößenpaares $\{E,L^2\}$ das Messwertpaar $\{-\hbar^2/(8ma_0^2), 2\hbar^2\}$ zu finden.

g) Überlegen Sie, was man für die in (a) bis (f) errechneten Größen erhält, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0, sondern $t > t_0$ gewählt wird (keine Rechnung erforderlich).

2. Gegeben sei ein wasserstoffähnliches Ion mit Kernladungszahl Z und nur einem gebundenen Elektron im Grundzustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ verändert sich plötzlich die Kernladungszahl auf Grund einer nuklearen Reaktion (β-Zerfall): $Z \to Z + 1$. Die Wellenfunktion des Elektrons ändert sich während dieser (schnellen) Reaktion zunächst nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Elektron nach der Kernreaktion im Grundzustand des Ions mit der erhöhten Kernladungszahl zu finden?

Hinweis: Die Energieeigenfunktionen $\psi^Z_{nlm}(r,\theta,\phi) = R^Z_{nl}(r)\,Y^m_l(\theta,\phi)$ und die dazugehörigen Eigenenergien E^Z_n eines wasserstoffähnlichen Ions können dabei als bekannt angenommen werden:

$$R^Z_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\, e^{-\frac{Zr}{na_0}} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l L^{2l+1}_{n-l-1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)$$

$$E^Z_n = -\left(\frac{Z^2\hbar^2}{2m_e a_0^2}\right)\frac{1}{n^2},\quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

3. Betrachten Sie die stationären Eigenzustände $|n\,l\,m\rangle$ des Wasserstoffatoms.
   a) Das Wasserstoffatom befinde sich im angeregten Zustand mit $n = 4$. Bestimmen Sie die Frequenz bzw. Wellenlänge des Photons, das beim Übergang in den Grundzustand emittiert wird. In welchem spektralen Bereich liegt die Frequenz? Hängen ihre Ergebnisse von den Quantenzahlen l und m ab? Warum (nicht)?
   b) Besitzen die Eigenzustände $|n\,l\,m\rangle$ des Wasserstoffatoms ein elektrisches Dipolmoment? Berechnen Sie dazu den Erwartungswert $\langle n\,l\,m|\,\vec{d}\,|n\,l\,m\rangle$ mit $\vec{d} = -e\vec{r}$. *Hinweis: Stellen Sie Überlegungen zur Parität der auftretenden Ausdrücke an.*

4. Betrachten Sie das Wasserstoffatom im Grundzustand $|1\;0\;0\rangle$. Veranschaulichen Sie die Wellenfunktion bzw. die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte des Zustands graphisch. Wo ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des gebundenen Elektrons am größten? Berechnen Sie außerdem:
   a) den Erwartungswert und die Unschärfe des Abstandes des Elektrons vom Atomkern,
   b) den wahrscheinlichsten Wert dieses Abstandes,
   c) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Abstand $r < a_0$ anzutreffen und
   d) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im oberen Halbraum $z > 0$ anzutreffen.

Hinweise:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\rho^\nu e^{-\beta\rho} = \frac{\nu!}{\beta^{\nu+1}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+$$

$$\int \mathrm{d}\rho\,\rho^2 e^{-\beta\rho} = -\left[\frac{\rho^2}{\beta} + \frac{2\rho}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3}\right] e^{-\beta\rho} + C$$

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4