11. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 15.01.2016

1. N$=\frac{1}{6}$

   a) $P(E=-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{1}) = \frac{1}{9}$, $P(E=-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, $P(E=-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{9}) = \frac{5}{36}$, $P = 0$ für alle anderen Energien.

   b) $\langle H \rangle = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{407}{1296}$

   c) $P(b_l=0) = \frac{1}{9}$, $P(b_l=2\hbar^2) = \frac{3}{4}$, $P(b_l=6\hbar^2) = \frac{5}{36}$, $P = 0$ für alle anderen Bahndrehimpulsquadrate.

   d) $P(L_z=\hbar) = \frac{21}{36}$

   e) $\langle L_z \rangle = \frac{11}{36}\hbar$

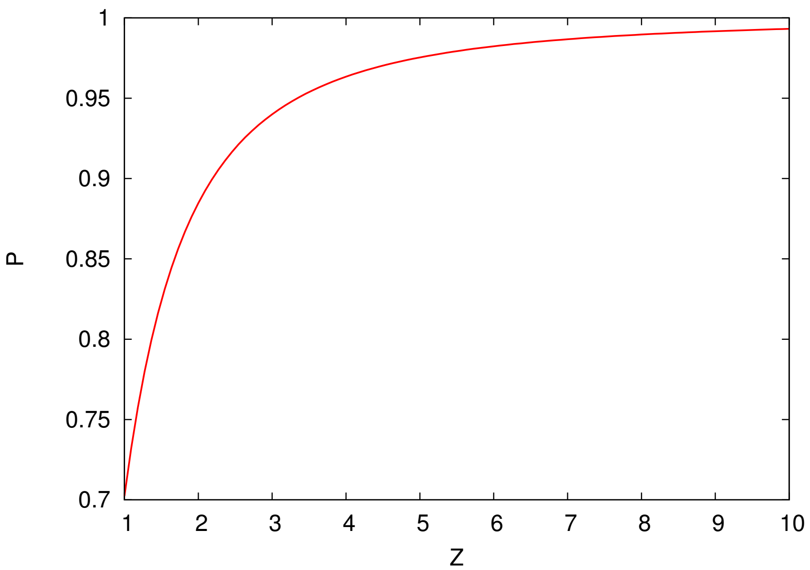
   f) $n = 2, l = 1 \rightarrow P = \frac{3}{4}$

   g) Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht, da die Wellenfunktion aus einer Linearkombination von gemeinsamen Eigenfunktionen der Operatoren $\{H, L^2, L_z\}$ besteht und diese mit H kommutieren ($\rightarrow$ Erhaltungsgrößen).

2. Wellenfunktion des Elektrons: $\Psi = R_{10}^{Z}(r)Y_0^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{4Z^3}{a_0^3}}e^{-\frac{Zr}{a_0}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

   Grundzustandswellenfunktion des Ions: $\tilde{\Psi}_0 = R_{10}^{Z+1}(r)Y_0^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{4(Z+1)^3}{a_0^3}}e^{-\frac{(Z+1)r}{a_0}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

   Übergangswahrscheinlichkeit: $P = \left|\int \mathrm{d}^3r \left(\tilde{\Psi}_0\right)^* \Psi\right|^2 = 64\frac{Z^3(Z+1)^3}{(2Z+1)^6}$



Übergangswahrscheinlichkeit für Bsp. 2 in Abhängigkeit der Kernladungszahl Z.

3. a) $\Delta E = E_4 - E_1 = 12,75$ eV $= 2,04 \cdot 10^{-18}$ J. $\Delta E = hf \to f = 3,083 \cdot 10^{15}$ Hz. $c = \lambda f \to \lambda = 9,731 \cdot 10^{-8}$m $\to$ UV-Strahlung. Das Ergebnis ist unabhängig von m und l, da die Energie nur von n abhängt (n^2-fache Entartung).

b) Paritätsoperator Π: $\Pi^\dagger \Pi = 1$, $\Pi\, \vec{r}\, \Pi^\dagger = -\vec{r}$, $\Pi \left| nlm \right\rangle = (-1)^l \left| nlm \right\rangle$ (folgt aus den Eigenschaften der Y_l^m)

$$\begin{aligned}\left\langle nlm \left| \vec{d} \right| nlm \right\rangle &= -e \left\langle nlm \left| \vec{r} \right| nlm \right\rangle \\ &= -e \left\langle nlm \left| \Pi^\dagger \Pi\, \vec{r}\, \Pi^\dagger \Pi \right| nlm \right\rangle \\ &= -e \left\langle nlm \left| (-1)^l \, (-\vec{r}) \, (-1)^l \right| nlm \right\rangle \\ &= (-1)^{2l+1} \left(-e \left\langle nlm \left| \vec{r} \right| nlm \right\rangle\right) \\ &= (-1)^{2l+1} \left\langle nlm \left| \vec{d} \right| nlm \right\rangle .\end{aligned}$$

Da $2l+1$ immer ungerade ist, folgt daraus $\left\langle \vec{d} \right\rangle = -\left\langle \vec{d} \right\rangle \to \left\langle \vec{d} \right\rangle = 0$.

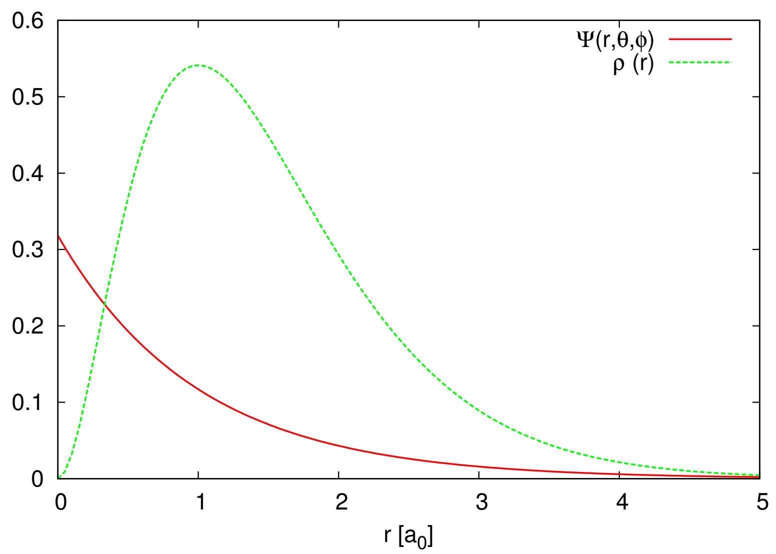
4. $\left|\Psi_{100}^1 (r,\theta,\phi)\right|^2 = \frac{1}{a_0^3 \pi} e^{-\frac{2r}{a_0}} \to$ die maximale Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist bei $r = 0$.

a) $\Psi_{100}^1 (r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{a_0^3 \pi}} e^{-\frac{r}{a_0}}$, $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0$, $\sigma_r = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0$.

b) $\rho(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$. Für den wahrscheinlichsten Abstand $r_{\max}$ gilt $\frac{\partial}{\partial r}\rho(r)|_{r_{\max}} = 0 \Rightarrow r_{\max} = a_0$.

c) $P = \int_0^{a_0} r^2 \,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\phi \,\left|\Psi_{100}^1 (\mathrm{r},\theta,\phi)\right|^2 = 1 - \frac{5}{\mathrm{e}^2}$.

d) $P = \int_0^\infty r^2 \,\mathrm{d}r \int_{\pi/2}^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\phi \,\left|\Psi_{100}^1 (\mathrm{r},\theta,\phi)\right|^2 = \frac{1}{2}$.



Wellenfunktion $\Psi(r,\theta,\phi)$, für beliebiges θ und ϕ, und die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r)$ für Bsp. 4.